内斯比特不等式的类似、推广、加强与应用

参赛队员 李世文 张晟 李东特
指导教师 杨志明
参赛学校 广东广雅中学
省份 广东省

目　　录

摘要......2

Summary......3

一、初涉内斯比特不等式......4

二、内斯比特不等式的研究与推广......5

三、内斯比特不等式的类似......10

四、内斯比特不等式加强形式......19

五、内斯比特不等式的应用......29

六、有关内斯比特不等式的猜想......33

参考文献......36

后记......37

内斯比特不等式的类似、推广、加强与应用

摘要：本文从内斯比特不等式的最基本形式入手，进行深入的研究与推广，加强及联想，继而得到一些优美的结论。主要运用三大基本不等式与各种不同的证明方法对不等式进行研究，并借助 maple 与 bottema2009 软件得出一些普遍的规律与加强形式，这对于证明其他不等式都很有效。本文可以说是一段研究历程的完全展示，由浅入深，体现思维的发展，最后再回归应用。

创新之处：将内斯比特不等式进行了一系列的推广、加强、类似及其应用。

闪光之处：借助$(a-b)(b-c)(c-a)$、$(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)$对

$\sum(\frac{a}{b+c})-\frac{3}{2}$和$\sum(\frac{a^2}{b+c})-\frac{a+b+c}{2}$进行估值, 由此得到了一系列的极强的加强命题，并证明。

关键词: 内斯比特不等式加强　类似　猜想　应用　SOS 法（Sum of Square）　差分代换法　形式变换

The Similarity ,Extension, Enhancement and Application Of Nesbitt's Inequality

Summary In this article, we have drawn some wonderful conclusions by making further study and generalizing the basic form of Nesbitt's inequality. Meanwhile we have emphasized and associated it . We have made a comprehensive study to the inequality based on the three basic inequalities and various methods of proof. some general rules and sharpening forms have been obtained by the two softwares: maple and bottema2009, which is of great effect to the proof of the other inequalities. In some sense, this article can perform our comprehensive study because it shows the reader such a clear clue: from simplicity to complexity, telling the development of the thoughts and above all, exemplifying how to apply it.

Innovation: We are unique in generalizing and emphasizing Nesbitt's inequality as well as in its similarity and application.

Highlight: With the aid of $(a-b)(b-c)(c-a)$, $(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)$,we evaluate the result of $\sum(\frac{a}{b+c})-\frac{3}{2}$ and $\sum(\frac{a^2}{b+c})-\frac{a+b+c}{2}$,then we have gained a series of the extremely strong propositions and have proved them.

Key words: Nesbitt's inequality emphasis ; Similarity ; Guess Application; SOS method (Sum of Square) ; Finite difference method ; Form transform

内斯比特不等式的类似、推广、加强与应用

1．初涉内斯比特不等式

1954 年，美国数学家 H.S.Shapiro 提出了一个猜想：当 nÓ3 时，有循环不等式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}}\geq\frac{n}{2}.$$

1958 年英国剑桥大学教授莫尔捷洛首先证明了 nÒ6 时不等式成立，并猜测 n=7 时不成立.但是，1961 年贝尔格莱德的数学家德耶科维奇推翻了莫尔捷洛的猜测，并证明了 n=8 时不等式成立（证明方法也适用于 n=7 的情形）.é é 目前证明了 nÒ12 时不等式成立，而 n 为不小于 25 的奇数以及 n 为不小于 14 的偶数时，不等式不成立.

特别地，当 $n=3$ 时，即为内斯比特不等式.即有

当 $a,b,c\in R_+$,有：

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

这就是内斯比特不等式的基本形式,它有许多证法，而我们只列举其中两种，其他的方法，读者可自行思考：

证法一：排序不等式

设 $a\geq b\geq c$，则

$$2(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})\geq\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}=3.$$

$$\therefore\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

证法二：柯西不等式或均值不等式

$$\left[(a+b)+(a+c)+(b+c)\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)\geq 9,$$

$$\therefore 3+\frac{c}{a+b}+\frac{b}{c+a}+\frac{a}{b+c}\geq\frac{9}{2}.$$

$$\therefore\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

2．内斯比特不等式的研究与推广

变式 我们接着思考以下不等式是否也能成立：

$$\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

这是一个轮换对称式，而非对称式，所以经过证明可知此式不成立.但如果我们加入某些条件时，以上方法已证明不了这个不等式，经过思考，我们运用差分法来证明这个不等

式.

证明 **1**：设$a \ge b \ge c$时，再设$a = c+\alpha+\beta, b = c+\alpha$， $\alpha \ge 0, \beta \ge 0$.

于是原式左边=$\frac{c+\alpha}{2c+\alpha}+\frac{c}{2c+\alpha+\beta}+\frac{c+\alpha+\beta}{2c+2\alpha+\beta}$.

接着我们先固定好c, α，考虑后两项：

$$\frac{c}{2c+\alpha+\beta}+\frac{c+\alpha+\beta}{2c+2\alpha+\beta}-\frac{c}{2c+\alpha}-\frac{c+\alpha}{2c+2\alpha}$$

$$=\frac{2c^2+5\alpha c+4\beta c+2c^2+\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{(2c+\alpha+\beta)(2c+2\alpha+\beta)}-\frac{2c^2+2\alpha c+2c^2+3\alpha c+\alpha^2}{(2c+\alpha)(2c+2\alpha)}$$

$$=\frac{\alpha^2\beta c+\alpha\beta^2 c+\alpha^3\beta+\beta^2\alpha^2}{(2c+\alpha+\beta)(2c+2\alpha+\beta)(2c+\alpha)(2c+2\alpha)} \ge 0.$$

当且仅当$\alpha = 0$或$\beta = 0$时，等号成立；

当$\beta = 0$时，$\frac{c+\alpha}{2c+\alpha}+\frac{c}{2c+\alpha+\beta}+\frac{c+\alpha+\beta}{2c+2\alpha+\beta}$变为

$$\frac{c+\alpha}{2c+\alpha}+\frac{c}{2c+\alpha}+\frac{c+\alpha}{2c+2\alpha}=\frac{3}{2}.$$

$\therefore \frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b} \ge \frac{3}{2}$，且$a \ge b \ge c$，不等式成立.

当且仅当$\alpha = 0$或$\beta = 0$时，等号成立.

证法一计算很繁，接着经过思考我们想到了更加简便的方法.

证明 **2**：$\left(\frac{a}{a+b}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{b}{b+c}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{c}{c+a}-\frac{1}{2}\right) \ge 0$，

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a} \ge 0,$$

$$(a-b)(b+c)(a+c)+(b-c)(a+b)(a+c)+(c-a)(a+b)(b+c) \ge 0.$$

左边$=(a-c)\left(2ab+2bc-ab-ac-b^2-bc\right)$

$=(a-c)(a-b)(b-c) \ge 0$.

$\therefore$事实上此不等式成立的条件为$a \ge b \ge c$或$b \ge c \ge a$或$c \ge a \ge b$.

而经上不等式轮换后所得的：

$$\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b} \ge \frac{3}{2}.$$

同理，我们找到此不等式成立条件为：$c \ge a \ge b$或$a \ge c \ge b$或$b \ge a \ge c$.

接着我们将不等式拓展至四维的情况：

$$\frac{d}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{a}{b+c+d} \ge \frac{4}{3}.$$

这运用柯西不等式，依葫芦画瓢，即可证明.

推广 **1**：设$a, b, c > 0$,则有

$$\sum\left(\frac{a^{m+1}}{b^{m+1}+c^{m+1}}\right) \ge \sum\left(\frac{a^m}{b^m+c^m}\right).$$

证明：将不等式右端移至左端有：

左端=$\frac{a^{m+1}}{b^{m+1}+c^{m+1}}-\frac{a^m}{b^m+c^m}+\frac{b^{m+1}}{a^{m+1}+c^{m+1}}-\frac{b^m}{a^m+c^m}+\frac{c^{m+1}}{a^{m+1}+b^{m+1}}-\frac{c^m}{a^m+b^m}$

通分得：$\sum[\frac{a^m b^m\left(a-b\right)+a^m c^m\left(a-c\right)}{\left(b^{m+1}+c^{m+1}\right)\left(b^m+c^m\right)}]$

进一步转化得：$\sum[\frac{a^m b^m\left(a-b\right)}{\left(b^{m+1}+c^{m+1}\right)\left(b^m+c^m\right)}+\frac{a^m b^m\left(b-a\right)}{\left(a^{m+1}+c^{m+1}\right)\left(a^m+c^m\right)}]$

合并得：

$$\sum[\frac{\left\{\sum_{i=0}^{m-1}\left(a^{2m-i}b^i\right)+a^m\left(b^m+c^m\right)+\sum_{j=1}^{m}\left[a^{m-j}\left(b^{m+j}+b^jc^m+b^{j-1}c^{m+1}\right)\right]\right\}a^m b^m\left(a-b\right)^2}{\left(b^{m+1}+c^{m+1}\right)\left(b^m+c^m\right)\left(a^{m+1}+c^{m+1}\right)\left(a^m+c^m\right)}]\geq 0$$

所以原不等式得证.

故有：$\sum(\frac{a^m}{b^m+c^m})\geq\sum(\frac{a^n}{b^n+c^n})$ 在 $m,n\in N_+,m\geq n$ 上成立.

猜想：$\sum(\frac{a^m}{b^m+c^m})\geq\sum(\frac{a^n}{b^n+c^n})$ 在 $m,n\in R_+,m\geq n$ 上成立.

推广 **2**：已知 $n\geq 3,a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$T=\sum_{i=1}^{n}a_i$，则 $\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i}{T-a_i})\geq\frac{n}{n-1}$.

证明:由柯西不等式知：$\sum_{i=1}^{n}(T-a_i)\bullet\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{T-a_i})\geq n^2$ 可化为：

$(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i\bullet\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{T-a_i})\geq n^2\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}a_i\bullet\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{T-a_i})\geq\frac{n^2}{n-1}$

$\Leftrightarrow n+\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i}{T-a_i})\geq\frac{n^2}{n-1}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i}{T-a_i})\geq\frac{n}{n-1}$.

但我们发现：$\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}\geq\frac{4}{3}$.

以上形式的不等式（包括 n 维）在任何情况下都不恒成立.但当我们将其改造成如下形式时：$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}\geq 2$ 此不等式成立的条件为：

$a、b、c、d\in\mathrm{R}_+$ $\mathrm{a}\geq c\geq b\geq d$或$\mathrm{d}\geq b\geq a\geq c$或$b\geq d\geq c\geq a$或$\mathrm{c}\geq a\geq d\geq b$.

证明：要证明原不等式，即证：$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-d}{c+d}+\frac{d-a}{d+a}\geq 0$.

将左边通分并因式分解可得：$\frac{2(b-d)(a-c)(ac-bd)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}$.

由此可知，当 $a\geq c\geq b\geq d$或$d\geq b\geq a\geq c$或$b\geq d\geq c\geq a$或$c\geq a\geq d\geq b$ 时不等式成立.

其实这是著名 shapiro 循环不等式的变形.但当我们研究到五维情况时

$(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+e}+\frac{e}{e+a}\geq\frac{5}{2})$，此式已经不可以用因式分解法证明，而差分法依旧可行，但要寻找它们成立的情况并找出规律已经相当困难，有兴趣的读者可自行尝试寻求其中的规律.

在进一步的探讨中，我们发现 1995 年 IMO 试题中有如下形式的不等式：

设$a,b,c>0,abc=1$,求证：$\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}\geq\frac{3}{2}$.

证明：由题意，设$a=\frac{yz}{x^2},b=\frac{zx}{y^2},c=\frac{xy}{z^2}$其中$x,y,z\in R^+$，则：

$$\frac{1}{a^2(b+c)}=\frac{1}{\frac{y^2z^2}{x^4}(\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2})}=\frac{x^3}{y^3+z^3}.$$

同理再得二式，于是，原不等式等价于

$$\frac{x^3}{y^3+z^3}+\frac{y^3}{z^3+x^3}+\frac{z^3}{x^3+y^3}\geq\frac{3}{2}.$$

这就等价于内斯比特不等式.我们尝试运用类似的代换法将该不等式推广到四维.

推广**3.1**：$\frac{1}{a^3(b+c+d)}+\frac{1}{b^3(c+d+a)}+\frac{1}{c^3(d+a+b)}+\frac{1}{d^3(a+b+c)}\geq\frac{4}{3}$,

其中$a,b,c,d>0,abcd=1$.

证明：设$a=\frac{yzw}{x^3},b=\frac{zwx}{y^3},c=\frac{wxy}{z^3},d=\frac{xyz}{w^3}$其中$x,y,z,w\in R^+$，,则：

$$\frac{1}{a^3(b+c+d)}=\frac{1}{\frac{y^3z^3w^3}{x^9}(\frac{zwx}{y^3}+\frac{wxy}{z^3}+\frac{xyz}{w^3})}=\frac{x^8}{y^4z^4+z^4w^4+w^4y^4}$$

$$=\frac{2x^8}{2y^4z^4+2z^4w^4+2w^4y^4}\geq\frac{2x^8}{(y^8+z^8)+(z^8+w^8)+(w^8+y^8)}$$

$$=\frac{x^8}{y^8+z^8+w^8}.$$

同理再得三式，于是有：

$$\frac{1}{a^3(b+c+d)}+\frac{1}{b^3(c+d+a)}+\frac{1}{c^3(d+a+b)}+\frac{1}{d^3(a+b+c)}$$

$$\geq\frac{x^8}{y^8+z^8+w^8}+\frac{y^8}{z^8+w^8+x^8}+\frac{z^8}{w^8+x^8+y^8}+\frac{w^8}{x^8+y^8+z^8}\geq\frac{4}{3}.$$

推广**3.2** $\sum_{i=1}^{n}[\frac{1}{a_i^{n-1}(\sum_{i=1}^{n}a_i-a_i)}]\geq\frac{n}{n-1}$（$a_n\in R_+(n\geq 3,n\in N_+)$，$\prod_{i=1}^{n}a_i=1$）

证明：设 $a_i=\frac{\prod_{i=1}^{n}b_i}{b_i^n}$，$\prod_{i=1}^{n}(\frac{\prod_{i=1}^{n}b_i}{b_i^n})=1[b_n>0(n\geq 3,n\in N_+)]$ 则有：

$$\frac{1}{a_i^{n-1}(\sum_{i=1}^{n}a_i-a_i)}=\frac{1}{\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}b_i}{b_i^n}\right)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(\frac{\prod_{i=1}^{n}b_i}{b_i^n})-\frac{\prod_{i=1}^{n}b_i}{b_i^n}\right)}=\frac{b_i^{n^2-2n}}{\frac{1}{b_i^n}\left(\sum_{i=1}^{n}(\frac{\prod_{i=1}^{n}b_i^n}{b_i^n})-\frac{\prod_{i=1}^{n}b_i^n}{b_i^n}\right)}$$

根据排序不等式得：$\frac{b_i^{n^2-2n}}{\frac{1}{b_i^n}\left(\sum_{i=1}^{n}(\frac{\prod_{i=1}^{n}b_i^n}{b_i^n})-\frac{\prod_{i=1}^{n}b_i^n}{b_i^n}\right)}\geq\frac{b_i^{n^2-2n}}{\sum_{i=1}^{n}(b_i^{n^2-2n})-b_i^{n^2-2n}}$.

我们继续将不等式变形：

$\frac{e+d}{a+b+c}+\frac{d+c}{a+b+e}+\frac{c+b}{a+d+e}+\frac{b+a}{c+d+e}+\frac{a+e}{b+c+d}\geq\frac{10}{3}$.（此不等式依旧可用柯西不等式来证明，大同小异）.

由此推广至：

$\frac{a_1+a_2+....+a_k}{a_{k+1}+a_{k+2}+......+a_n}+\frac{a_2+a_3+......+a_{k+1}}{a_{k+2}+a_{k+3}+......+a_n+a_1}+......+\frac{a_n+a_1+......+a_{k-1}}{a_k+a_{k+1}+......+a_{n-1}}\geq\frac{kn}{n-k}$.（证法：用柯西不等式即可，与以上的不等式证明相像.）

推广 **4**：当 $a,b,c\in R_+$，$a+b+c=1$，λ、α、$\beta\in\mathrm{R}_+$ 有：

$\sum\frac{\alpha a}{\beta b+\lambda c}\geq\frac{3\alpha}{\beta+\lambda}$.

证明：需要先将原不等式左边调整为：

$\frac{\alpha(\beta b+\lambda c+\beta c+\lambda a+\beta a+\lambda b)(\sum\frac{a}{\beta b+\lambda c})}{(\beta+\lambda)}$,

然后用柯西不等式（参考以上证法）.于是推广到最一般的情况：

推广 **5**：$\alpha_i\geq 0$，$a_i\geq 0\ (1\leq i,k\leq n;i,k,n\in N_+)$，$\lambda$、$\alpha$、$\beta\in\mathrm{R}_+$，$\mu\geq 1$时，有：

$$[\frac{\lambda(a_1+a_2+......+a_k)}{\beta_1a_{k+1}+......+\beta_{n-k}a_n}]^\mu+[\frac{\lambda(a_n+a_1+......+a_{k-1})}{\beta_1a_k+......+\beta_{n-k}a_{n-1}}]^\mu+......+[\frac{\lambda(a_2+a_3+......+a_k+a_{k+1})}{\beta_1a_{k+2}+......+\beta_{n-k-1}a_n+\beta_{n-k}a_1}]^\mu\geq\frac{n(k\lambda)^\mu}{(\sum_{j=1}^{n-k}\beta_j)^\mu}$$

证法：第一步：均值不等式提指数；第二步：柯西不等式消分母（参考以上证法与类似二），即可证明原不等式.

3．内斯比特不等式的类似

如果分子分母不齐次且具有类似结构的不等式如何解决呢？这就是我们将要讨论的问题.（此类问题我们不讨论加参数的情况）.

类似 **1.1** 设 $a,b,c>0$,则有

$$\sum \frac{a^3}{b^2+c^2} \ge \sum \frac{a^2}{b+c}.$$

证明：将不等式右端移至左端有：

左端= $\sum\left(\frac{a^3}{b^2+c^2}-\frac{a^2}{b+c}\right)=\sum\left(\frac{a^2\left(ab+ac-b^2-c^2\right)}{\left(b^2+c^2\right)\left(b+c\right)}\right)$

变形得：$\sum\left(\frac{a^2c\left(a-c\right)}{\left(b^2+c^2\right)\left(b+c\right)}+\frac{c^2a\left(c-a\right)}{\left(a^2+b^2\right)\left(a+b\right)}\right)$

$$= \sum\left(\frac{ac\left(a-c\right)^2\left[a^3+a^2\left(b+c\right)+a\left(b^2+c^2+bc\right)+b^3+b^2c+bc^2+c^3\right]}{\left(b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2\right)\left(b+c\right)\left(a+b\right)}\right)\ge 0$$

即原不等式得证.

类似上述证法，我们推广得：

类似 **1.2** $a,b,c>0$, $\sum\left(\frac{a^{m+i}}{b^m+c^m}\right)\ge\sum\left(\frac{a^{n+i}}{b^n+c^n}\right)\quad(m,n\in N_+,m\ge n,i\in N)$.

类似 **1.3** $a_i\ge 0$ $(1\le i\le n,i\in R_+)$,则有：$\sum_{j=1}^{n}[\frac{a_j^2}{(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)-a_j^2}]\ge\sum_{j=1}^{n}[\frac{a_j}{(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_j}]$

证明：$\sum_{j=1}^{n}[\frac{a_j^2}{(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)-a_j^2}]-\sum_{j=1}^{n}[\frac{a_j}{(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_j}]=\sum_{j=1}^{n}[\frac{{a_j}^2}{(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)-a_j^2}-\frac{a_j}{(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_j}]$

$$=\sum_{j=1}^{n}\{\frac{\sum_{k=1}^{n}[a_ja_k(a_j-a_k)]}{[(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)-a_j^2][(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_j]}\}=\sum\{\frac{a_1a_2(a_1-a_2)}{[(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)-a_1^2][(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_1]}+\frac{a_1a_2(a_2-a_1)}{[(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)-a_2^2][(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_2]}\}$$

$$=\sum\{\frac{a_1a_2(a_1-a_2)^2\{a_1(\sum_{i=1}^{n}a_i)+a_2[(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_1]+(\sum_{i=1}^{n}a_i)-{a_1}^2-{a_2}^2\}}{[(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)-a_1^2][(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_1][(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)-a_2^2][(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_2]}\}\ge 0$$ （共 C_n^2 项）

类似 **2.1** 设 $T=\sum_{i=1}^{n}a_i$ ，$\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i}{T-a_i})^2\ge\frac{n}{(n-1)^2}$（证法：运用均值不等式可得：

$\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i}{T-a_i})^2\ge\frac{(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{T-a_i})^2}{n}\ge\frac{n}{(n-1)^2}$ ）.

类似 **2.2** 且当 $\mu\ge 1$ 时，有：$\sum_{i=1}^{n}[\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_i}]^{\mu}\ge\frac{n}{(n-1)^{\mu}}$

证明：根据幂平均不等式：当 Ŭ>б，有：

$$\cdot\ (\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha}}{n})^{\frac{1}{\alpha}} \geq (\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\beta}}{n})^{\frac{1}{\beta}}$$

则：$\sum_{i=1}^{n}[\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_i}]^{\mu} \geq n\cdot[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_i})]^{\mu} \geq \frac{n^{\mu+1}}{(n-1)^{\mu}\cdot n^{\mu}} \geq \frac{n}{(n-1)^{\mu}}$

当$\mu<1$且为有理数时，幂平均不等式已经证明不了此类不等式（条件不符合$\alpha>\beta$）. 因此我们先探究一个简单形式：

类似 **3.1** 设$a,b,c>0$,则有

$$\sqrt[3]{(\frac{a}{b+c})^2}+\sqrt[3]{(\frac{b}{a+c})^2}+\sqrt[3]{(\frac{c}{a+b})^2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

经过分析我们可以先证明以下这一个部分不等式：

$\sqrt[3]{(\frac{a}{b+c})^2} \geq \frac{3a}{\sqrt[3]{4}(a+b+c)}$，即证:

$$(\frac{a}{b+c})^2 \geq \frac{27a^3}{4(a+b+c)^3} \Leftrightarrow \frac{8(a+b+c)^3}{27} \geq 2a(b+c)^2.$$

$$\therefore 2a(b+c)^2 \leq (\frac{2a+b+c+b+c}{3})^3 = \frac{8(a+b+c)^3}{27}.$$

部分不等式得证.同理可得：$\sqrt[3]{(\frac{b}{a+c})^2} \geq \frac{3b}{\sqrt[3]{4}(a+b+c)}$；

$\sqrt[3]{(\frac{c}{a+b})^2} \geq \frac{3c}{\sqrt[3]{4}(a+b+c)}$，由三式相加，即证得原不等式.

类似 **3.2** 设$a,b,c>0$,$n\in N^*$，则有：$\sum(\frac{a}{b+c})^{\frac{n}{n+1}} \geq \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{n^n}}$

$$(na)(b+c)^n \leq [\frac{n(a+b+c)}{n+1}]^{n+1}.\Leftrightarrow (b+c)^n \leq \frac{n^n(a+b+c)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}a}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{a}{b+c})^{\frac{n}{n+1}} \geq \frac{n+1}{n^{\frac{n}{n+1}}}\cdot\frac{a}{a+b+c}.$$

所以，同理可得：

$$(\frac{b}{c+a})^{\frac{n}{n+1}} \geq \frac{n+1}{n^{\frac{n}{n+1}}}\cdot\frac{b}{a+b+c};\quad (\frac{c}{c+a})^{\frac{n}{n+1}} \geq \frac{n+1}{n^{\frac{n}{n+1}}}\cdot\frac{c}{a+b+c}.$$

以上三式叠加即可证明原不等式.

类似 **4** 设$a,b,c>0$,$m,n\in N^*$，则有

$$\sum(\frac{a}{b+c})^{\frac{n}{n+m}} \geq \frac{n+m}{\sqrt[n+m]{n^n m^m}}.$$

证明：$(\frac{n}{m}a)^m(b+c)^n \leq [\frac{n(a+b+c)}{n+m}]^{n+m}.\Leftrightarrow (b+c)^n \leq \frac{n^n m^m(a+b+c)^{n+m}}{(n+m)^{n+m}a^m}$

$$\Leftrightarrow (\frac{a}{b+c})^{\frac{n}{n+m}} \geq \frac{n+m}{n^{\frac{n}{n+m}}m^{\frac{m}{n+m}}}\cdot\frac{a}{a+b+c}$$

所以，同理可得：

$$(\frac{b}{c+a})^{\frac{n}{n+m}} \ge \frac{n+m}{n^{\frac{n}{n+m}} m^{\frac{m}{n+m}}} \cdot \frac{b}{a+b+c},$$

$$(\frac{c}{c+a})^{\frac{n}{n+m}} \ge \frac{n+m}{n^{\frac{n}{n+m}} m^{\frac{m}{n+m}}} \cdot \frac{c}{a+b+c}.$$

$\frac{n}{n+m}=\frac{1}{2}$时，当$a,b,c$三数中，其中之一为 0，余下两数为正实数且相等时，等号成立，$\frac{n}{n+m}=\frac{2}{3}$时,当且仅当$a=b=c$，等号成立.

以上三式叠加即可证明原不等式.

类似 **5** 设$a,b,c,d \in R^{+}$，则有

$$\sqrt[4]{(\frac{a}{b+c+d})^3}+\sqrt[4]{(\frac{b}{a+c+d})^3}+\sqrt[4]{(\frac{c}{a+b+d})^3}+\sqrt[4]{(\frac{d}{a+b+c})^3} \ge \frac{4}{\sqrt[4]{3^3}}.$$

证明：$3a(b+c+d)^3 \le [\frac{3(a+b+c+d)}{4}]^4 . \Leftrightarrow (b+c+d)^3 \le \frac{3^3(a+b+c+d)^4}{4^4 a}$

$. \Leftrightarrow (\frac{a}{b+c+d})^3 \ge \frac{4^4}{3^3} \cdot \frac{a^4}{(a+b+c+d)^4} . \Leftrightarrow (\frac{a}{b+c+d})^{\frac{3}{4}} \ge \frac{4}{3^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{a}{a+b+c+d}$

所以，同理可得：

$(\frac{b}{c+d+a})^{\frac{3}{4}} \ge \frac{4}{3^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{b}{a+b+c+d}$，$(\frac{c}{d+a+b})^{\frac{3}{4}} \ge \frac{4}{3^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{c}{a+b+c+d}$

. $(\frac{d}{a+b+c})^{\frac{3}{4}} \ge \frac{4}{3^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{d}{a+b+c+d}$

以上四式叠加即可证明原不等式.当且仅当$a=b=c=d$ 时等号成立.

类似 **6** 若$a_i \ge 0$ $(1 \le i \le n, i \in R_{+})$，$m,n,l \in N^{*}$时，有

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[\frac{l}{m+l}]{\frac{a_i}{(\sum_{1}^{n} a_i)-a_i}} \ge \frac{m+l}{\sqrt[m+l]{m^m l^l}}.$$

证明：$(\frac{l}{m}a_i)^m[(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_i]^l \le (\frac{l \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i}{l+m})^{l+m} \Leftrightarrow \frac{(\frac{l}{m}a_i)^l}{[(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_i]^l} \ge \frac{(\frac{l}{m}a_i)^{m+l}(l+m)^{l+m}}{l^{m+l}\cdot(\sum_{i=1}^{n}a_i)^{l+m}}$

$\Leftrightarrow \frac{{a_i}^l}{[(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_i]^l} \ge \frac{(l+m)^{l+m}\cdot {a_i}^{l+m}}{m^m l^l \cdot (\sum_{i=1}^{n}a_i)^{l+m}} \Leftrightarrow \sqrt[\frac{l}{l+m}]{\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_i}} \ge \frac{(l+m)\cdot a_i}{\sqrt[m+l]{m^m l^l}\cdot(\sum_{i=1}^{n}a_i)}$

同理可得 n-1 项部分不等式，将其相加即证得原不等式。

而且易知：当且仅当$l=m(n-1)$时，若能有$a_1=a_2=......=a_n$，不等式等号成立。其他情况只能无穷逼近等号（或令其中几项等于零，但有时仍旧无法取等号），这受我们的能力所限无法总结规律，留给读者探讨。

类似 **7** 若$a,b,c \in R_{+}$，$a+b+c=1$，则有：

$$\frac{1+c}{a+b}+\frac{1+a}{b+c}+\frac{1+b}{c+a} \ge 6.$$

证法：需要先将原不等式左边调整为：“$(\sum\frac{2}{a+b})-3$或$3+\sum\frac{c}{a+b}$”之后，用柯西不等式证明.

或在每一项分母上加上1，（$a,b,c\in R_+$，$a+b+c=1$）则有：

$$\frac{c}{a+b+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{a}{b+c+1}\geq\frac{3}{5}.$$

证法：需要先将原不等式左边调整为$(\sum\frac{2}{a+b+1})-3$或$\sum\frac{c}{2a+2b+c}$之后，用柯西不等式证明）

推广得到一道经典的题目：

类似 **8** 若a_1、a_2、……、$a_n\in R_+$，$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，则有：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{1-a_i+\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)\geq\frac{n}{2n-1}.$$

证法：需要先将原不等式左边调整为$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i}{2(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_i}\right]$或$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{1-a_i+\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)-n$之后，用柯西不等式.

假如我们将每项分子分母都加上1，则不等式不仅具有最小值，而且具有最大值.

类似 **9** 若$a,b,c\in R_+$，$a+b+c=1$，则有：

$$3\geq\frac{1+c}{1+a+b}+\frac{1+b}{1+c+a}+\frac{1+a}{1+b+c}\geq\frac{12}{5}.$$

如果用我们之前的方法只能证明右边的大于号，但无法证明全式，故引入导数调整法.

$$\frac{1+c}{1+a+b}+\frac{1+b}{1+c+a}+\frac{1+a}{1+b+c}$$

$$=\frac{1+a}{2-a}+\frac{1+b}{2-b}+\frac{1+c}{2-c}=3\left(\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\right)-3.$$

不妨设：$a\leq b\leq c$，$a=a_0$，$a_0\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$，$x=c-b$.

$$S=\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}.$$

则$c+b=1-a_0$，$c=\frac{1-a_0+x}{2}$，$b=\frac{1-a_0-x}{2}$.

$$\therefore S=\frac{1}{2-a_0}+\frac{1}{2-\frac{1-a_0-x}{2}}+\frac{1}{2-\frac{1-a_0+x}{2}}.$$

$$\therefore S=\frac{1}{2-a_0}+\frac{4(3+a_0)}{(3+a_0)^2-x^2}.$$

明显，当 x 越大，s 越小，对给定的a_0.

$b_{min}=a_0, c_{max}=1-2a_0, x_{max}=1-3a_0$，代入 S .

$$S_{(a_0)}=\frac{1}{2-a_0}-\frac{3+a_0}{2a_0{}^2-3a_0-2}=\frac{3a_0+4}{(2a_0+1)(2-a_0)},$$

$$S'_{(a_0)}=\frac{-6a_0{}^2+9a_0+6+(3a_0+4)(4a_0-3)}{(2a_0+1)^2(2-a_0)^2}$$

$$=\frac{6a_0{}^2+16a_0-6}{(2a_0+1)^2(2-a_0)^2}=\frac{2(3a_0-1)(a_0+3)}{(2a_0+1)^2(2-a_0)^2}$$

当$a_0\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$时，$S_{(a_0)}$单调递减，

$\therefore S_{(a_0)max}=S_{(0)}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$.　　左边大于号已得证，现证明右边大于号

$$[(2-a)+(2-b)+(2-c)]\left(\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\right)\ge 9$$

$$\left(\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\right)\ge\frac{9}{(2-a)+(2-b)+(2-c)}=\frac{9}{5}.$$

则有$3\left(\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\right)-3\ge 3\times\frac{9}{5}-3=\frac{12}{5}$.

推广至：

类似 **10** 当a_1、a_2、……、$a_n\in R_+$，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$，则有

$$\frac{n^2+n}{2n-1}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1+a_i}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i)-a_i}\le\frac{n+3}{2}.$$

（证法：依旧是导数调整法，先设固定其中的 n-2 项，由于过程繁复，故暂且略去）.

类似 **11** 若$a,b,c\in R_+$，$a+b+c=1$，则有：

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2}.$$

证明：$(b+c+a+c+a+b)(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{b+a})\ge(a+b+c)^2$ =1.

即：$2(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{b+a})\ge 1$，得证.

由此又可推广至以下形式：

类似 **12** 当a_1、a_2、……、$a_n\in R_+$，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\mu$，$m\ge 2$则有：

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i{}^m}{T-a_i})\ge\frac{\mu^{m-1}}{(n-1)n^{m-2}}.$$

证明：$(n-1)(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{a_i^m}{T-a_i})\ge(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{\frac{m}{2}})^2\ge\frac{n^2(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^m}{n^m}\ge\frac{\mu^m}{n^{m-2}}$（用到柯西与幂均值不等式），原不等式得证.

在第 31 届 IMO 备选题中，有一题如下：

类似 **13.1** 设$a,b,c,d>0$，且$ab+bd+cd+da=1$.求证：

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}.$$

经探讨发现，此题可由与上文类似方法证得.

证明：$\because \sum[a(b+c+d)]\sum\frac{a^3}{b+c+d}\geq(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$，

$$\therefore \Leftrightarrow \sum\frac{a^3}{b+c+d}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

$$\Leftrightarrow \sum\frac{a^3}{b+c+d}\geq\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3}\Leftrightarrow\sum\frac{a^3}{b+c+d}\geq\frac{ab+bc+cd+da}{3};$$

即 $\sum\frac{a^3}{b+c+d}\geq\frac{1}{3}$.则原不等式得证.

类似 **13.2** $\sum\left(\frac{a^n}{b+c+d}\right)\geq\frac{1}{3\bullet 2^{n-3}}\quad(n\geq 3)$

证明：$\sum[a^{n-2}(b+c+d)]\sum\left(\frac{a^n}{b+c+d}\right)\geq\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}+d^{n-1}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \sum\left(\frac{a^n}{b+c+d}\right)\geq\frac{\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}+d^{n-1}\right)^2}{\sum[a^{n-2}(b+c+d)]}$$

$$\Leftrightarrow \sum\left(\frac{a^n}{b+c+d}\right)\geq\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}+d^{n-1}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sum\left(\frac{a^n}{b+c+d}\right)\geq\frac{\left(ab+bc+cd+da\right)^{\frac{n-1}{2}}}{3\bullet 2^{n-3}}$$

$$\Leftrightarrow \sum\left(\frac{a^n}{b+c+d}\right)\geq\frac{1}{3\bullet 2^{n-3}}$$

我们还可将此类型不等式推广至 n 维的情况，这留给读者思考.

类似 **14** 若 $a,b,c\in R_+$， $a+b+c=1$，则有：

$$\frac{a^4}{b^3+c^3}+\frac{b^4}{a^3+c^3}+\frac{c^4}{b^3+c^3}\geq\frac{1}{2}.$$

证明：$\frac{(c^3)^2}{c^2(a^3+b^3)}+\frac{(a^3)^2}{a^2(b^3+c^3)}+\frac{(b^3)^2}{b^2(c^3+a^3)}$

$$\geq\frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{c^2(a^3+b^3)+a^2(b^3+c^3)+b^2(c^3+a^3)}\geq\frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{\frac{2}{3}(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)}$$

$$=\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{2(a^2+b^2+c^2)}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{2(a^2+b^2+c^2)}\geq\frac{1}{2}.$$

类似 **15** 若 $a,b,c\in R_+$， $m\geq 0$，则有：

$$\frac{a^{m+1}}{b^m+c^m}+\frac{b^{m+1}}{c^m+a^m}+\frac{c^{m+1}}{a^m+b^m}\geq\frac{a+b+c}{2}.$$

由 $a^{m+1}+b^{m+1}\ge ab^m+a^m b$ 得：

$2(a^{m+1}+b^{m+1})\ge a^{m+1}+b^{m+1}+ab^m+a^m b=(a^m+b^m)(a+b)$，

所以 $\dfrac{a^{m+1}+b^{m+1}}{a^m+b^m}\ge\dfrac{a+b}{2}$.

同理 $\dfrac{b^{m+1}+c^{m+1}}{b^m+c^m}\ge\dfrac{b+c}{2},\dfrac{c^{m+1}+a^{m+1}}{c^m+a^m}\ge\dfrac{c+a}{2}$.

不妨设 $a\ge b\ge c$，则

$a^{m+1}\ge b^{m+1}\ge c^{m+1}$,

$a^m+b^m\ge a^m+c^m\ge b^m+c^m$,

所以 $\dfrac{1}{b^m+c^m}\ge\dfrac{1}{a^m+c^m}\ge\dfrac{1}{a^m+b^m}$,

由排序不等式“顺序和”≥ ñ乱序和ò，得：

$$\frac{a^{m+1}}{b^m+c^m}+\frac{b^{m+1}}{c^m+a^m}+\frac{c^{m+1}}{a^m+b^m}\ge\frac{a^{m+1}}{c^m+a^m}+\frac{b^{m+1}}{a^m+b^m}+\frac{c^{m+1}}{b^m+c^m},$$

$$\frac{a^{m+1}}{b^m+c^m}+\frac{b^{m+1}}{c^m+a^m}+\frac{c^{m+1}}{a^m+b^m}\ge\frac{c^{m+1}}{c^m+a^m}+\frac{a^{m+1}}{a^m+b^m}+\frac{b^{m+1}}{b^m+c^m},$$

$$2\left(\frac{a^{m+1}}{b^m+c^m}+\frac{b^{m+1}}{c^m+a^m}+\frac{c^{m+1}}{a^m+b^m}\right)$$

$$\ge\frac{c^{m+1}+a^{m+1}}{c^m+a^m}+\frac{a^{m+1}+b^{m+1}}{a^m+b^m}+\frac{b^{m+1}+c^{m+1}}{b^m+c^m}$$

$$\ge\frac{c+a}{2}+\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}=a+b+c.$$

所以 $\dfrac{a^{m+1}}{b^m+c^m}+\dfrac{b^{m+1}}{c^m+a^m}+\dfrac{c^{m+1}}{a^m+b^m}\ge\dfrac{a+b+c}{2}$.

我们先把这个不等式加强成以下式子：

类似 **16** 若 $a,b,c\in R_+$，$m\ge 0$，$n\ge 0$，则有：

$$\frac{a^{m+n}}{b^m+c^m}+\frac{b^{m+n}}{c^m+a^m}+\frac{c^{m+n}}{a^m+b^m}\ge\frac{a^n+b^n+c^n}{2}.$$

考虑到切比雪夫不等式可由排序不等式证得，接着我们使用切比雪夫不等式：

$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i}{n}\ge\dfrac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\cdot\dfrac{\sum_{i=1}^{n}b_i}{n}$.（$a_1$、$a_2$......$a_n\in R_+,b_1$、$b_2$......$b_n\in R_+$）（类似 **15** 的过程中已间接证明了切比雪夫不等式。）

证明：$\dfrac{a^{m+n}}{b^m+c^m}+\dfrac{b^{m+n}}{c^m+a^m}+\dfrac{c^{m+n}}{a^m+b^m}$

$$\ge\frac{\sum a^n\bullet\sum\frac{a^m}{b^m+c^m}}{3}$$

$$\ge\frac{\frac{3}{2}\sum a^n}{3}=\frac{a^n+b^n+c^n}{2}.$$

接着有：$\dfrac{a^n+b^n+c^n}{2}\ge\dfrac{3(\frac{a+b+c}{3})^n}{2}=\dfrac{(\frac{1}{3})^{n-1}}{2}$.

由此可推广至：

类似 **17** 当 a_1、a_2、……、$a_n\in R_+$，$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，$m\in R_+,p\ge1$ 则有：$\sum_{i=1}^{n}[\dfrac{a_i^{m+p}}{(\sum_{i}^{n}a_i^m)-a_i^m}]\ge\dfrac{n}{(n-1)n^p}$.

证明：$\sum_{i=1}^{n}[\dfrac{a_i^{m+p}}{(\sum_{i}^{n}a_i^m)-a_i^m}]\ge\dfrac{(\sum_{i=1}^{n}a_i^p)\cdot(\sum_{i=1}^{n}[\frac{a_i^m}{(\sum_{i}^{n}a_i^m)-a_i^m}])}{n}\ge(\sum_{i=1}^{n}a_i)^p\dfrac{n}{n^p(n-1)}=\dfrac{n}{n^p(n-1)}$.

类似 **18.1** 当我们研读文[6]，并用 MAPLE 软件验证后，发现并总结（结合前面研究的内容：参照变式）知道诸如 $\dfrac{c}{b+c}+\dfrac{a}{c+a}+\dfrac{b}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$ 的分子分母齐次的轮换对称式在一般条件下不成立，但是在非齐次形式却有普遍规律（稍稍将文[6]的结论提升一下）.

设 $a,b,c,d,e,f,g,h\in R_+,n\in N_+$，且 $n\ge2$ 时，则：

$$\frac{a^n}{e}+\frac{b^n}{f}+\frac{c^n}{g}+\frac{d^n}{h}\ge\frac{(a+b+c+d)^n}{4^{n-2}(e+f+g+h)}$$

证明：当 $n\ge2$ 时，由幂平均不等式得：$a^{\frac{n}{2}}+b^{\frac{n}{2}}+c^{\frac{n}{2}}+d^{\frac{n}{2}}\ge4\bullet\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

原不等式等价于

$$(e+f+g+h)\left(\frac{a^n}{e}+\frac{b^n}{f}+\frac{c^n}{g}+\frac{d^n}{h}\right)=\left[(\sqrt{e})^2+(\sqrt{f})^2+(\sqrt{g})^2+(\sqrt{h})^2\right]\bullet[(\frac{a^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{e}})^2+(\frac{b^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{f}})^2+(\frac{c^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{g}})^2+(\frac{d^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{h}})^2]$$

$\ge\left(a^{\frac{n}{2}}+b^{\frac{n}{2}}+c^{\frac{n}{2}}+d^{\frac{n}{2}}\right)^2\ge\left[4\bullet\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2=\dfrac{(a+b+c+d)^n}{4^{n-2}}$，原不等式得证.

类似 **18.2** 设 $a_1,a_2,……,a_{n-1},a_n\in R_+,b_1,b_2,……,b_{n-1},b_n\in R_+,m,n\in R_+$ 且

$m\ge2,n\ge1,$ 则：$\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{a_i^m}{b_i}\right)\ge\dfrac{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^m}{n^{m-2}(\sum_{i=1}^{n}b_i)}$.

证明：当 $m\ge2$ 时，由幂平均不等式得：$\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{m}{2}}\ge n(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n})^{\frac{m}{2}}$；由柯西不等式得：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\bullet\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^m}{b_i}\right)=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{b_i}\right)^2\right]\bullet[\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{b_i}})^2]\ge\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{m}{2}}\right)^2\ge[n(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n})^{\frac{m}{2}}]^2=\frac{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^m}{n^{m-2}}.$$

类似 **19.1** 若 $a,b,c\in R_+$，则有：

$$\sum\frac{a}{b^2+c^2}\ge\frac{4}{a+b+c}.$$

证明：不妨设$a\ge b\ge c$.

此类不等式由于在$a=b$且$c=0$（或b=0,a=c或a=0，b=c）时等号成立，用一般的不等式很难证明，因此我们想到用SOS法证明.

证明：将不等式右边移到左边：$(a+b+c)\sum\frac{a}{b^2+c^2}-4\ge 0$.

去分母得：

$$a^6+b^6+c^6+(a^5b+ab^5+b^5c+bc^5+c^5a+ca^5)-3(a^4b^2+a^2b^4+b^4c^2+b^2c^4+c^4a^2+c^2a^4)$$

$$+2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+2abc(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)-5a^2b^2c^2\ge 0.$$

配方得：

$$(a^4+4a^3b+a^2b^2+4ab^3+b^4-2c^3a)(a-b)^2+(b^4+4b^3c+b^2c^2+4bc^3+c^4-2a^3b)(b-c)^2$$

$$+(c^4+4c^3a+c^2a^2+4ca^3+a^4-2b^3c)(c-a)^2+3abc(a^2c+ab^2+bc^2-3abc)\ge 0.\text{（*）}$$

设$S_a=b^4+4b^3c+b^2c^2+4bc^3+c^4-2a^3b$,

$S_b=c^4+4c^3a+c^2a^2+4ca^3+a^4-2b^3c$,

$S_c=a^4+4a^3b+a^2b^2+4ab^3+b^4-2c^3a$.

则原不等式左边化为：

$S_c(a-b)^2+S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2$

因为$a\ge b\ge c$

$S_b=c^4+4c^3a+c^2a^2+4ca^3+a^4-2b^3c$

$=c^4+4c^3a+c^2a^2+2ca^3+a^4+2c(a^3-b^3)\ge 0$,

$S_c=a^4+4a^3b+a^2b^2+4ab^3+b^4-2c^3a$

$=a^4+4a^3b+a^2b^2+2ab^3+b^4+2a(b^3-c^3)\ge 0$.

$\therefore a^2S_b+b^2S_a=a^6+4ca^5+c^2a^4+(-2b^3+4c^3)a^3+(c^4-2b^3c)a^2+b^6+4b^5c+b^4c^2+4b^3c^3+b^2c^4$

$\ge a^6-2a^3b^3+b^6+2ca^5-2a^2b^3c=(a^3-b^3)^2+2ca^2(a^3-b^3)\ge 0$.

因为$a\ge b\ge c$,所以$\frac{a-c}{b-c}\ge\frac{a}{b}$，则有：

$$\therefore S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2=(b-c)^2[S_a+\frac{(c-a)^2}{(b-c)^2}S_b]\ge(b-c)^2(S_a+\frac{a^2}{b^2}S_b)$$

$$=(b-c)^2\cdot\frac{b^2S_a+a^2S_b}{b^2}\ge 0.$$

所以 （*）成立.

又因为$a^2c+b^2a+c^2b-3abc\ge 3\sqrt[3]{a^2c\cdot b^2a\cdot c^2b}-3abc=0$.

所以不等式左边>=0 成立.

命题得证！

类似上述证明方法，我们把此不等式推广：

类似 **19.2** 若$a,b,c\in R_+$， $m,n\in N^*$,

$$\sum\frac{a^m}{b^{m+n}+c^{m+n}}\ge\frac{4}{a^n+b^n+c^n}.\text{（}a,b,c\in R_+\text{）}$$

证法与类似 **19.1** 非常相似，我们只需用映射的思想来思考这两者之间的关系即可。

4．内斯比特不等式加强形式

内斯比特不等式还可以进一步加强，为此，先给出几个引理.

引理 1 若 a,b,c 都是实数，且 $b+c,c+a,a+b$ 均不为 0, 则

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}[\frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}+\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)}+\frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)}]$$

证明：$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}[\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}-3]$

$$=\frac{1}{2}[(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}-1)+(\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-1)+(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}-1)]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{a(c+a)+b(b+c)-(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)}+\frac{b(a+b)+c(c+a)-(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)}$$

$$+\frac{c(b+c)+a(a+b)-(b+c)(c+a)}{(c+a)(a+b)}]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{c^2+a^2-2ca}{(a+b)(b+c)}+\frac{a^2+b^2-2ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{b^2+c^2-2bc}{(c+a)(a+b)}]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}+\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)}+\frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)}].$$

引理 2 若 a,b,c 都是实数，且 $b+c,c+a,a+b$ 均不为 0, 则

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}-\frac{a+b+c}{2}=(a+b+c)(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}).$$

证明：$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$

$$=\frac{a^2+a(b+c)}{b+c}+\frac{b^2+b(c+a)}{c+a}+\frac{c^2+c(a+b)}{a+b}-(a+b+c)$$

$$=\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(a+b+c)}{c+a}+\frac{c(a+b+c)}{a+b}-(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-1)$$

即 $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}-\frac{a+b+c}{2}=(a+b+c)(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2})$.

引理 3 若 a,b,c 都是实数，且 $b+c,c+a,a+b$ 均不为 0, 则

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}-\frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{4}[\frac{(2a-b-c)^2}{b+c}+\frac{(2b-c-a)^2}{c+a}+\frac{(2c-a-b)^2}{a+b}].$$

证明：$\frac{(2a-b-c)^2}{b+c}=\frac{4a^2}{b+c}-4a+b+c$，$\frac{(2b-c-a)^2}{c+a}=\frac{4b^2}{c+a}-4b+c+a$，

$\frac{(2c-a-b)^2}{a+b}=\frac{4c^2}{a+b}-4c+a+b$；

将以上三式相加即得

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}-\frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{4}[\frac{(2a-b-c)^2}{b+c}+\frac{(2b-c-a)^2}{c+a}+\frac{(2c-a-b)^2}{a+b}].$$

引理 **4** 已知$a,b,c\in R$，则有

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

证明：$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

$=[(a+b)+c][(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab]$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$.

引理 **5** 已知$a,b,c\in R$，则有：

$$(2a-b-c)^2+(2b-a-c)^2+(2c-b-a)^2=3[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

证明：$(2a-b-c)^2+(2b-c-a)^2+(2c-a-b)^2$

$=[(a-b)+(a-c)]^2+[(b-a)+(b-c)]^2+[(c-b)+(c-a)]^2$

$=2[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]+2[(a-b)(a-c)+(b-a)(b-c)+(c-a)(c-b)]$

$=2[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]$

$=3[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$.

下面给出内斯比特不等式的几个加强形式。

加强 **1**：若$a,b,c\in R_+$，则有

$$(\sum\frac{a}{b+c})-\frac{3}{2}\geq\frac{1}{2}\cdot\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

证明：原不等式等价于

$$\frac{1}{2}[\frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}+\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)}+\frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)}]\geq\frac{1}{2}\cdot\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}+\frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)}\geq[\frac{1}{a^2+b^2+c^2}-\frac{1}{(b+c)(c+a)}](a-b)^2.$$

由柯西不等式知：

$$\frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}+\frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)}\geq\frac{[(c-a)+(b-c)]^2}{(a+b)(b+c)+(c+a)(a+b)}$$

$$=\frac{(a-b)^2}{(a+b)(b+c)+(c+a)(a+b)},$$

因此，只需证明

$$\frac{1}{(a+b)(b+c)+(c+a)(a+b)}\geq\frac{1}{a^2+b^2+c^2}-\frac{1}{(b+c)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow c^4+(a+b)c^3-(a^2+b^2+3ab)c^2+2(a^3+b^3-a^2b-ab^2)c+a^4+b^4+2(a^3b+ab^3)\geq 0.$$

注意到

$$a^3+b^3-a^2b-ab^2=(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)=(a+b)(a-b)^2\geq 0,$$

因此，只需证明

$$c^4+(a+b)c^3-(a^2+b^2+3ab)c^2+a^4+b^4+2(a^3b+ab^3)\geq 0.$$

由于上式是齐次式，不妨设$c=1$，则不等式可化为：

$$a^4+b^4+2ab(a^2+b^2)-(a^2+b^2+3ab)+(a+b)+1\geq 0.$$

令$a+b=u,ab=v$，则$u^2\geq 4v$.

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=u^2-2v,$$

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=(u^2-2v)^2-2v^2,$$

则不等式等价于：

$$(u^2-2v)^2-2v^2+2v(u^2-2v)-(u^2-2v+3v)+u+1\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2v^2+(2u^2+1)v-u^4+u^2-u-1\leq 0.$$

$$2v^2+(2u^2+1)v-u^4+u^2-u-1$$

$$\leq 2(\frac{u^2}{4})^2+(2u^2+1)\cdot\frac{u^2}{4}-u^4+u^2-u-1$$

$$=-\frac{3u^4-10u^2+u-1}{8}$$

$$=-\frac{(u+2)(3u^3-6u^2+2u+4)}{8}$$

$$=-\frac{(u+2)[(\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u^3+4-3u^2)+2(u^3+u-2u^2)+u^2]}{8}$$

$$=-\frac{(u+2)[(\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u^3+4-3u^2)+2(u^3+u-2u^2)+u^2]}{8}$$

$$=-\frac{(u+2)[(2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}u+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}u-\sqrt[3]{4})^2+2u(u-1)^2+u^2]}{8}\leq 0.$$

加强 **2**：若$a,b,c\in R_+$，则有

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}-\frac{a+b+c}{2}\geq \mathrm{k}\cdot\frac{(2a-b-c)^2}{(a+b+c)}.$$

通过 MAPLE 软件找到 k 的最大值为$\frac{1}{2}$，现直接证明最强情况.

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}-\frac{a+b+c}{2}\geq\frac{(2a-b-c)^2}{2(a+b+c)}.$$

证明：原不等式等价于

$$\frac{1}{4}[\frac{(2a-b-c)^2}{b+c}+\frac{(2b-c-a)^2}{c+a}+\frac{(2c-a-b)^2}{a+b}]\geq\frac{(2a-b-c)^2}{2(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2a-b-c)^2}{b+c}+\frac{(2b-c-a)^2}{c+a}+\frac{(2c-a-b)^2}{a+b}\geq\frac{2(2a-b-c)^2}{a+b+c}.$$

由柯西不等式知，

$$\frac{(2a-b-c)^2}{b+c}+\frac{(2b-c-a)^2}{c+a}+\frac{(2c-a-b)^2}{a+b}\geq\frac{(2a-b-c)^2}{(c+a)+(a+b)}+\frac{(2a-b-c)^2}{b+c}$$

$$=[\frac{1}{(c+a)+(a+b)}+\frac{1}{b+c}](2a-b-c)^2$$

$$\geq \frac{4}{(c+a)+(a+b)+(b+c)}(2a-b-c)^2$$

$$=\frac{2(2a-b-c)^2}{a+b+c}.$$

推论 2.1：若$a,b,c\in R_+$，则有

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\geq \frac{(2a-b-c)^2}{2(a+b+c)^2}.$$

简证：$(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2})(a+b+c)\geq \frac{(2a-b-c)^2}{2(a+b+c)}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}-\frac{a+b+c}{2}\geq \frac{(2a-b-c)^2}{2(a+b+c)}$$

加强 **3.1**：若$a,b,c\in R_+$，则有:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\geq k\cdot\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a+b+c)^2}.$$

现在我们要寻找k的最大值，运用MAPLE软件计算得k的最大值为1.

接下来我们证明k=1时，不等式成立.

法一：原不等式左边

$$=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}-\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{2\sum a^5-\sum(a^4b+ab^4)-\sum(a^3b^2+a^2b^3)+2\sum a^2b^2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)^2}$$

根据Schur不等式：$\sum a^r(a-b)(a-c)\geq 0$，当r=3时，有

$a^3a(a-c)-a^3b(a-c)+b^3b(b-a)-b^3c(b-a)+c^3c(c-b)-c^3a(c-b)\geq 0$，（1）

$a^5-a^3b^2-a^3c^2-a^3bc+2ab^2c^2+b^5-b^3c^2-b^3a^2-b^3bc+2bc^2a^2+c^5-c^3a^2-c^3b^2-c^3bc+2ca^2b^2\geq 0$，

$a^3(a-b)(a+b)+b^3(b-c)(b+c)+c^3(c-a)(c+a)+a^2b^2(c-b)+a^2c^2(b-a)$

$+b^2c^2(a-c)+a^2bc(b-a)+abc^2(a-c)+ab^2c(c-b)\geq 0$.

$(a-b)(a^4+ba^3-a^2c^2-a^2bc)+(b-c)(b^4+b^3c-a^2b^2-ab^2c)+(c-a)(c^4+ac^3-b^2c^2-abc^2)\geq 0.$

$(a+b+c)\left[a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)\right]\geq 0$，（2）

（1）+（2）即证原不等式. 我们认为这种证法非常优美，只需连续用到两次Schur不等式即可证明。

要证明此不等式还可用到 SOS 法(Sum of Sqiare)的思想，并找到因式分解的形式.

法二：$\sum\left(\frac{(a-b)+(a-c)}{b+c}\right)\geq \frac{2\sum(a-b)^2}{(a+b+c)^2}$

$$\Leftrightarrow \sum(a+b)(a-b)^2\geq \frac{2\left[\sum(a-b)^2\right](a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum(a-b)^2(a+b)\left(a^2+b^2-c^2\right)\geq 0。$$

因为这是一个对称式，所以不妨设$a\geq b\geq c$；

注意到，则要证明原不等式成立，即要证明：

$$(a-c)^2 S_b+(b-c)^2 S_a=\left[S_a+\left(\frac{a-c}{b-c}\right)^2 S_b\right](b-c)^2 \ge \left(b^2 S_a+a^2 S_b\right)\left[\frac{(b-c)^2}{b^2}\right]$$

若要证：$S_a(b-c)^2+S_b(a-c)^2+S_c(b-a)^2 \ge 0$，即证：$b^2S_a+a^2S_b \ge 0$

$$\therefore b^2S_a+a^2S_b=\left(b^3+cb^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)+\left(a^3+ca^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)$$

$$=a^5+b^5+a^4c+b^4c+a^3c^2+b^3c^2+a^2c^3+b^2c^3-a^2b^3-b^2a^3-2a^2b^2c$$

根据均值不等式得：$b^5+a^5 \ge a^2b^3+a^3b^2, b^4c+a^4c \ge 2a^2b^2c$

所以原不等式成立.

此外，我们找出了三种等价于原不等式的优美的不等式(均为最强形式)，现分列如下：

推论 3.1 若 $a,b,c \in R_+$，则有

$$\sum \frac{a^2}{b+c}-\frac{a+b+c}{2} \ge \frac{\sum (a-b)^2}{a+b+c}.$$

简证：$\sum\left(\frac{2a^2}{b+c}-a\right) \ge \frac{2\left[\sum(a-b)^2\right]}{a+b+c} \Leftrightarrow \sum\left(\frac{2a^2-ab-ac}{b+c}\right) \ge \frac{2\left[\sum(a-b)^2\right]}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow \sum\left(\frac{a(a-b)+a(a-c)}{b+c}\right) \ge \frac{2\left[\sum(a-b)^2\right]}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum\left[(a-b)^2(a+b)(a+b+c)^2\right] \ge 2\left[\sum(a-b)^2\right](a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow \sum\left[(a-b)^2(a+b)\left(a^2+b^2-c^2\right)\right] \ge 0 \cdot$$

$\therefore$ 原不等式得证.

推论 3.2 若 $a,b,c \in R_+$，则有

$$\sum \frac{a^3}{b+c}-\frac{\sum a^2}{2} \ge \frac{1}{2} \bullet \sum (a-b)^2 \cdot$$

简证：$\sum\left(\frac{2a^3}{b+c}-a^2\right) \ge \sum (a-b)^2 \Leftrightarrow \sum\left(\frac{a^2(a-b)+a^2(a-c)}{b+c}\right) \ge \sum (a-b)^2$

$$\Leftrightarrow \sum\left[(a+b)(a-b)^2\left(a^2+ab+ac+b^2+bc\right)\right] \ge \left[\sum(a-b)^2\right](a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow \sum\left[(a+b)(a-b)^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\right] \ge 0 \cdot$$

$\therefore$ 原不等式得证.

推论 3.3 若 $a,b,c \in R_+$，则有

$$\sum \frac{a^3}{b+c}-\frac{1}{6}(\sum a)^2 \ge \frac{2}{3} \bullet \sum (a-b)^2 \cdot$$

简证：$\sum \frac{a^2(a-b)+a^2(a-c)+a(a-b)(a+b)+a(a-c)(a+c)+2a(a^2-bc)}{b+c} \ge 4\sum(a-b)^2$

$$\Leftrightarrow \sum(a-b)^2(a+b)(2a^2+2ca+3ab+2bc+2b^2)+\sum 2a(a^2-bc)(a+b)(c+a)$$

$$\ge 4(\sum(a-b)^2)(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow \sum(a-b)^2(a+b)(2a^2-2ca-ab-4c^2+2b^2-2bc)+\sum 2a^5+2a^4b+2a^4c-6ab^2c^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum (a-b)^2(a+b)(2a^2-2ca-ab-4c^2+2b^2-2bc)$$

$$+\sum (a-b)^2(a+b)(a^2+2ca+ab+c^2+b^2+2bc) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum\left[(a+b)(a-b)^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\right] \ge 0 \cdot$$

$\therefore$ 原不等式得证.

推论 3.4 若 $a,b,c \in R_+$，则有: $\sum \frac{a^2}{b+c}-\frac{a+b+c}{2} \ge \frac{1}{3} \cdot \frac{\sum (2a-b-c)^2}{a+b+c}.$

推论 3.5 若 $a,b,c\in R_+$，则有: $\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}\ge\frac{1}{3}\cdot\frac{\sum(2a-b-c)^2}{(a+b+c)^2}$.

推论 3.6 若 $a,b,c\in R_+$，则有: $\sum\frac{a^3}{b+c}-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\ge\frac{1}{6}\sum(2a-b-c)^2$.

推论 3.7 若 $a,b,c\in R_+$，则有: $\sum\frac{a^3}{b+c}-\frac{(a+b+c)^2}{6}\ge\frac{2}{9}\sum(2a-b-c)^2$.

推论 3.8 若 $a,b,c\in R_+$，则有: $\sum\frac{a^2}{b+c}-\frac{a+b+c}{2}\ge\frac{2(a^3+b^3+c^3-3abc)}{(a+b+c)^2}$.

推论 3.9 若 $a,b,c\in R_+$，则有: $\sum\frac{a^3}{b+c}-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\ge\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c}$.

若指数再增加，则不等式的规律已不成立. 这是加强了的“十兄弟”.

加强**4**：若 $a,b,c\in R_+$，则有 $\sum(\frac{a}{b+c})-\frac{3}{2}\ge k\cdot\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}$.

文[11]仅仅证明了k= $\frac{1}{3}$. 通过MAPLE软件，我们找到了k的最大值为 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，虽然k为无理数，但依旧有法可证. 接下来我们直接证明这个最强的情况.

$$\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}\ge\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

证明： $\sum(\frac{a}{b+c})-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\bullet\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}\ge 0$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{(a-b)+(a-c)}{b+c}\ge\frac{(\sqrt{3}-1)(\sum(a-b)^2)}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow\sum(a-b)^2(a+b)\ge(\sqrt{3}-1)\frac{[\sum(a-b)^2]}{a^2+b^2+c^2}(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow\sum(a-b)^2(a+b)(a^2+b^2+c^2)\ge(\sqrt{3}-1)[\sum(a-b)^2](a+b)(a+c)(b+c)$$

$$\Leftrightarrow\sum(a-b)^2(a+b)[a^2+b^2+c^2-(\sqrt{3}-1)(a+c)(b+c)]\ge 0.$$

因为这是一个对称式，所以不妨设 $a\ge b\ge c$, 并且设：

$S_c=(a+b)[a^2+b^2+c^2-(\sqrt{3}-1)(a+c)(b+c)]$，

$S_b=(c+a)[a^2+b^2+c^2-(\sqrt{3}-1)(b+a)(b+c)]$，

$S_a=(b+c)[a^2+b^2+c^2-(\sqrt{3}-1)(a+b)(a+c)]$；

注意到 $(\sqrt{3}-1)<\frac{3}{4}$，则有：

$$S_c=(a+b)[a^2+b^2+c^2-(\sqrt{3}-1)(a+c)(b+c)]\ge(a+b)[a^2+b^2+c^2-\frac{3}{4}(a+c)(b+c)]$$

$$\ge(a+b)\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)\ge 0,$$

$\therefore S_c>0$；至于 S_b，稍稍需要技巧，注意到：$(2-\sqrt{3})+\frac{1}{2}>\sqrt{3}-1$（均值不等式），

则有：$S_b=(c+a)[a^2+b^2+c^2-(\sqrt{3}-1)(b^2+ac+ab+bc)]\ge(c+a)\{[(2-\sqrt{3})a^2+\frac{1}{2}c^2-(\sqrt{3}-1)ac]$

$$+[(2-\sqrt{3})b^2+\frac{1}{2}c^2-(\sqrt{3}-1)bc]+(\sqrt{3}-1)(a^2+b^2-b^2-ab)]\}\ge 0\cdot$$

（一开始若把含有b^2的项合并成$(2-\sqrt{3})b^2$，则无法证明$S_b>0$）

$\therefore S_b>0$.

注意到$\frac{a-c}{b-c}\ge\frac{a}{b}$，则要证明原不等式成立，即要证明：

$$\therefore S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2=(b-c)^2[S_a+S_b(\frac{a-c}{b-c})^2]\ge\frac{(b-c)^2}{b^2}(b^2S_a+a^2S_b)\ge 0.$$

现证明：$b^2S_a+a^2S_b\ge 0$；

$$b^2S_a+a^2S_b=a^5+b^5+(2-\sqrt{3})(a^3c^2+b^3c^2+2a^2b^2c+a^3b^2+a^4c+a^2b^3+b^4c)$$
$$+(1-\sqrt{3})(2a^3bc+2ab^3c+ab^2c^2+a^2bc^2+ab^4+a^4b)+b^2c^3+a^2c^3$$
$$=b^2c[\frac{1}{2}c^2+(2-\sqrt{3})b^2+\frac{1}{2}c^2+(2-\sqrt{3})a^2+(1-\sqrt{3})(bc+ac)]+a^2c[\frac{1}{2}c^2+(2-\sqrt{3})b^2+\frac{1}{2}c^2$$
$$+(2-\sqrt{3})a^2+(1-\sqrt{3})(bc+ac)]+a^5+b^5+(2-\sqrt{3})(a^3b^2+a^4c+a^2b^3+b^4c)$$
$$+(1-\sqrt{3})(2a^3bc+2ab^3c+ab^4+a^4b)+a^3c^2+b^3c^2$$
$$\ge[(2-\sqrt{3})a^3b^2+\frac{1}{2}a^3c^2+(1-\sqrt{3})a^3bc]+[(2-\sqrt{3})a^2b^3+\frac{1}{2}b^3c^2+(1-\sqrt{3})ab^3c]$$
$$+[(2-\sqrt{3})a^5+\frac{1}{2}a^3c^2]+[(2-\sqrt{3})b^5+\frac{1}{2}b^3c^2]+(\sqrt{3}-1)(a^5+b^5-a^3bc-ab^3c-a^4b-ab^4)$$
$$\ge(\sqrt{3}-1)[(a^5+b^5-a^4b-ab^4)+(a^4c+b^4c-a^3bc-ab^3c)]\ge 0.$$

故原不等式得证！

我们还找到了两个等价形式：

推论4.1 $\sum\frac{a^2}{b+c}-\frac{a+b+c}{2}\ge\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\frac{[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2](a+b+c)}{a^2+b^2+c^2}$.

推论4.2 $\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}\ge\frac{\sqrt{3}-1}{6}\cdot\sum\frac{(2a-b-c)^2}{a^2+b^2+c^2}$.

推论 4.3 $\sum\frac{a^2}{b+c}-\frac{a+b+c}{2}\ge\frac{(\sqrt{3}-1)(a^3+b^3+c^3-3abc)}{a^2+b^2+c^2}$.

加强 **5**：$\sum\frac{a}{b+c}\ge\frac{3}{2}+\frac{17}{6}\bullet\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ （$a,b,c\ge 0$）

证明：不妨设 max（a,b,c）=a

移至左边：$\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}-\frac{17}{6}\bullet\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 0$

左边=$\frac{1}{3}\cdot\frac{3a^3+3b^3+3c^3+7b^2c-10ab^2-10bc^2+7ac^2+7a^2b-10a^2c)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$

当$a\ge b\ge c$时，显然不等式成立（$\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\le 0$）。

当$a\ge c\ge b$时，若$a+b\ge 2c$，不等式左边=

$$\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}[(c-b)^3+3(c-b)^2(a-2c+b)+8(c-b)(a-2c+b)^2+3(a-2c+b)^3$$
$$+18b(c-b)^2+18b(c-b)(a-2c+b)+6b(a-2c+b)^2]\ge 0$$

若$a+b<2c$，不等式左边=

$$\frac{1}{3(a+b)(b+c)(c+a)}[(a-c)^3+3(2c-b-a)^3+18(a-c)(2c-b-a)b+18(a-c)^2b$$

$+5(a-c)(2c-b-a)^2+6(2c-b-a)^2 b]$

命题得证！

加强 **6**　再来看看加强 **5** 的对称形式：当 $a,b,c\in R_+$，则有：

$(\sum\frac{a}{b+c})-\frac{3}{2}\geq\frac{k(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}$；k的最大值又是一个无理数 $\frac{9}{2}+2\sqrt{2}$，开始时我们采取SOS法来证明此不等式，通过运算，我们发现有如下恒等式：

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2=(a-b)^2[c^4+abc^2-c^3(a+b)]+(a-c)^2[b^4+ab^2c-b^3(a+c)]+(b-c)^2[a^4+a^2bc-a^3(b+c)]$$

结合引理 1 与上式，可得：

$$\sum(a-b)^2\{(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc)(a+b)-(9+4\sqrt{2})[c^4+abc^2-c^3(a+b)]\}\geq 0$$

设：$a\geq b\geq c$，$S_a=(a+b)(b+c)^2(a+c)-(9+4\sqrt{2})a^2(a-b)(a-c)$

$$S_b=(a+b)(b+c)(a+c)^2-(9+4\sqrt{2})b^2(b-a)(b-c)$$

$$S_c=(a+b)^2(b+c)(a+c)-(9+4\sqrt{2})c^2(c-b)(c-a)$$

对于 S_a 与 S_b，我们已证得此两者都大于或等于零（非常易证），然而当我们继续用 SOS 法证明时，发现不等式无法得证。我们尝试将 **SOS** 法加强如下：

当 $a-b\geq b-c$ 时，

$$(a-b)^2S_c+(b-c)^2S_a+(c-a)^2S_b=[(\frac{a-b}{b-c})^2S_c+S_a+(\frac{a-c}{b-c})^2S_b](b-c)^2$$

$$\geq[(\frac{a-b+c}{b})^2S_c+S_a+(\frac{a}{b})^2S_b](b-c)^2\geq[S_c+S_a+(\frac{a}{b})^2S_b](b-c)^2$$

$$=(b^2S_c+b^2S_a+a^2S_b)\frac{(b-c)^2}{b^2}$$

当 $a-b\leq b-c$ 时，

$$(a-b)^2S_c+(b-c)^2S_a+(c-a)^2S_b=[(\frac{a-b}{b-c})^2S_c+S_a+(\frac{a-c}{b-c})^2S_b](b-c)^2$$

$$\geq[(\frac{a-b}{b-c})^2S_c+S_a+(\frac{a}{b})^2S_b](b-c)^2$$

$$\geq[b^2(a-b)^2S_c+b^2(b-c)^2S_a+a^2(b-c)^2S_b]\frac{1}{b^2}$$

但是，我们依旧无法用此方法解决这个问题（原因：$-(9+4\sqrt{2})a^4$ 这一项的系数太小！），因此我们只有再另辟蹊径。

证明：原不等式可变为：$(\sum\frac{a}{b+c})-\frac{3}{2}-(\frac{9}{2}+2\sqrt{2})\cdot\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}\geq 0$

我们通过大量运算发现原不等式通分并去分母后可以化为：

$$(a-c)(b-c)[-(a-b)^2+\sqrt{2}(a-c)(b-c)]^2+\mathrm{c}(2a^5+2b^5+7a^4b+7ab^4$$

$$+10a^3c^2+10b^3c^2+8a^2bc^2+8ab^2c^2+7ac^4+7bc^4-2c^5-8abc^3-10a^2c^3-10b^2c^3$$

$$-12a^3bc-12ab^3c-5a^4c-5b^4c-2a^2b^3-2a^3b^2)$$

$$=c[(2a^5+2b^5-2a^2b^3-2a^3b^2)+c^4(b-c)+c^4(a-c)+4bc^3(c-a)+4ac^3(c-b)+2ac^3(c-a)$$

$$+2bc^3(c-b)+8a^2c^2(b-c)+8b^2c^2(a-c)+10a^3c(c-b)+10b^3c(c-a)+2ab^3(b-c)+2a^3b(a-c)+5a^4(b-c)+5b^4(a-c)]$$

$$+(a-c)(b-c)[-(a-b)^2+\sqrt{2}(a-c)(b-c)]^2$$

$$\geq c\{(a-c)[(2a^3b-2ac^3)+c^4-4bc^3+8b^2c^2-10b^3c+5b^4]$$

$$+(b-c)[(2b^3a-2bc^3)+c^4-4ac^3+8a^2c^2-10a^3c+5a^4]\}$$

$$+(a-c)(b-c)[-(a-b)^2+\sqrt{2}(a-c)(b-c)]^2$$

$$\geq c(a-c)[c^3(c-b)+3bc^2(b-c)+5b^2c(c-b)+5b^3(b-c)]$$

$$+c(b-c)[c^3(c-a)+3ac^2(a-c)+5a^2c(c-a)+5a^3(a-c)]$$

$$+(a-c)(b-c)[-(a-b)^2+\sqrt{2}(a-c)(b-c)]^2$$

$$=(a-c)\cdot(b-c)\cdot\{c\cdot[(5a^3-5a^2c)+(3ac^2-c^3)+(5b^3-5b^2c)+(3bc^2-c^3)]$$

$$+[-(a-b)^2+\sqrt{2}(a-c)(b-c)]^2\}\geq 0$$

原不等式得证！

此不等式极强，以至于 SOS 法无法奏效，其实此不等式证明的技巧在于找到这个美妙的式子：$(a-c)(b-c)[-(a-b)^2+\sqrt{2}(a-b)(b-c)]^2$，并且我们根据此证法思考对称三维不等式（或轮换对称）能否化成如此形式：$(a-c)(b-c)(S_1+S_2)$ 或 $(a+b-2c)(S_1+S_2)$ 或 $(a-b)(a-c)(b-c)(S_1+S_2)$【我们假设了 $a\geq b\geq c$】。

差分法：不妨设 $a\geq b\geq c$，可令 $a=c+x+y,b=c+x(x\geq 0,y\geq 0)$，则原不等式等价于

$$32(x^2+xy+y^2)c^4+(80x^3+120x^2y+136xy^2+48y^3)c^3+(72x^4+144x^3y+192x^2y^2$$

$$+120xy^3+24y^4)c^2+(28x^5+70x^4y+108x^3y^2+92x^2y^3+34xy^4+4y^5)c$$

$$+4x^6+12x^5y+(12-4\sqrt{2})x^4y^2+(4-8\sqrt{2})x^3y^3+(2-4\sqrt{2})x^2y^4+2xy^5\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ 32(x^2+xy+y^2)c^4+(80x^3+120x^2y+136xy^2+48y^3)c^3+(72x^4+144x^3y+192x^2y^2$$

$$+120xy^3+24y^4)c^2+(28x^5+70x^4y+108x^3y^2+92x^2y^3+34xy^4+4y^5)c$$

$$+x(x+y)(2x^2+2xy-\sqrt{2}y^2)^2 \ge 0$$

加强 **7**　我们寻找类似 **19** 与内斯比特不等式的内在联系，通过 MAPLE 软件得到，若 $a,b,c\in R_+$，则有(系数 2 为最强情况):

$$2\cdot\sum\frac{a}{b+c}\le(a+b+c)\sum\frac{a}{b^2+c^2}$$

证明：要证明原不等式即证：

$$\sum\frac{a(a+b+c)}{b^2+c^2}-\frac{2a}{b+c}\ge 0 \Leftrightarrow \sum[\frac{ab(a-b)+(a-c)ac}{(b^2+c^2)(b+c)}]+\sum\frac{2abc}{(b^2+c^2)(b+c)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{(a-b)^2ab(a^2+b^2+ab+ac+bc+c^2)}{(b^2+c^2)(b+c)(a^2+c^2)(a+c)}+\sum\frac{2abc}{(b^2+c^2)(b+c)}\ge 0$$

不等式显然成立。但实际上此不等式并不难，比类似 19 还易证明。

可推广此不等式至：

$$(\sum\frac{a^m}{b^{m+n}+c^{m+n}})\cdot(\sum a^n)\ge 2\cdot\sum\frac{a^m}{b^m+c^m}\ge 2\cdot\sum\frac{a}{b+c}$$（$m,n\in R_+$，$m,n\ge 1$）

要证明左大于等于号，与上式相似（故不详证)；右大于等于号请参照推广 **1**

加强 **8** 当 $a,b,c\in R_+$ 则有如下形式：

$$k\cdot\frac{(\sum a^3)-(\sum a^2)(\sum a)}{\sum a^2}\le(\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2})(a+b+c)$$

通过 MAPLE 软件有 k=1.5 为最大值

$$\frac{3\cdot(\sum a^3)-(\sum a^2)(\sum a)}{2\cdot\sum a^2}\le(\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2})(a+b+c)$$

证明：要证明原式即证明：

$$(a+b)(b+c)(c+a)\cdot\frac{2\cdot\sum a^3-\sum a\cdot\sum a^2}{\sum a^2}\le[\sum(a-b)^2(a+b)](a+b+c)$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)\frac{2\sum a^3-\sum(a^2b+a^2c)}{\sum a^2}\le[\sum(a-b)^2(a+b)](a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sum(a-c)^2(a+c)}{\sum(a^2)\cdot\sum a}\le\frac{\sum(a-b)^2(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)\sum(a-c)^2(a+c)\le\sum(a-b)^2(a+b)\cdot\sum(a^2)\cdot\sum a$$

$$\Leftrightarrow[\sum(a-c)^2(a+c)]\cdot[(a+b)(b+c)(c+a)-\sum(a^2)\cdot\sum a]\ge 0$$

要证此不等式，即证：$a^3+b^3+c^3-2abc\ge 0$；该式显然成立，则原不等式得证。

初看此式会觉得非常繁杂，但我们只需要掌握一些恒等式的规律即可把原式化为：

$$\sum\frac{a^2}{b+c}\ge\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

总结：在证明加强不等式时比较有效且证法明了的方法有 SOS 法，而至于三角替换法（$x+y=a$，$x+z=b$，$z+y=c$，a,b,c 为三角形的三边）虽看似灵动活巧（这种方法已有很多半成品），但一到证明系数最大的形式时，三角替换法就很弱了，往往放缩过度，因此用三角替换法研究加强不等式有不少局限性，因此我们暂时弃之不用。而 SOS 法是否就是绝对通用了呢？当我们遇到部分轮换对称和一些不对称的加强不等式时 SOS 法的局限性就很明显的体现出来了。虽然一般可以用差分法把它们都解出来，但没有技巧性，我们认为用差分法研究不等式并不能很好的锻炼人的思维。而对于轮换对称和不对称的加强不等式

依旧可以使用“拼凑”的方法，但技巧性就更高了，如：加强 **5**、加强 **6**。我们已经发现一些规律，可是在现阶段凭我们的能力，很难找出这一类问题的通用解法。今后，这方面的研究会很有意义。我们还认为，研究不等式一定要有结合恒等式的思想（不一定要是阿贝尔（Abel）恒等式，拉格朗日(Lagrange)恒等式等高级的恒等式），这样的话才会找到理想的形式。

5．内斯比特不等式的应用

例 **1**．（2009 年第五届北方数学竞赛题）若 x、y、$z>0$ 且 $x^2+y^2+z^2=3$，求证：

$$\frac{x^{2009}-2008(x-1)}{y+z}+\frac{y^{2009}-2008(y-1)}{z+x}+\frac{z^{2009}-2008(z-1)}{x+y}\ge\frac{1}{2}(x+y+z).$$

(命题人：杨海滨等)

证明：由均值不等式知，

$$x^{2009}-2008(x-1)=x^{2009}+1+\ldots\ldots+1_{(2008个1)}-2008x\ge 2009x-2008x=x,$$

故 $\dfrac{x^{2009}-2008(x-1)}{y+z}\ge\dfrac{x}{y+z}$，

同理 $\dfrac{y^{2009}-2008(y-1)}{z+x}\ge\dfrac{y}{z+x}$，$\dfrac{z^{2009}-2008(z-1)}{x+y}\ge\dfrac{z}{x+y}$，

由柯西不等式得

故 $\dfrac{x^{2009}-2008(x-1)}{y+z}+\dfrac{y^{2009}-2008(y-1)}{z+x}+\dfrac{z^{2009}-2008(z-1)}{x+y}$

$$\ge\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=\frac{x^2}{x(y+z)}+\frac{y^2}{y(z+x)}+\frac{z^2}{z(x+y)}$$

$$\ge\frac{(x+y+z)^2}{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}=\frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)}\ge\frac{3(xy+yz+zx)}{2(xy+yz+zx)}=\frac{3}{2}.$$

而 $\dfrac{1}{2}(x+y+z)\le\dfrac{1}{2}\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3\times 3}=\dfrac{3}{2}$.

故 $\dfrac{x^{2009}-2008(x-1)}{y+z}+\dfrac{y^{2009}-2008(y-1)}{z+x}+\dfrac{z^{2009}-2008(z-1)}{x+y}\ge\dfrac{1}{2}(x+y+z)$.

例 **2**．设 $a,b,c>0$，求证：$\dfrac{1}{a(1+b)}+\dfrac{1}{b(1+c)}+\dfrac{1}{c(1+a)}\ge\dfrac{3}{\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)}$.

证明：设 $abc=k^3>0,a=k\cdot\dfrac{a_2}{a_1},b=k\cdot\dfrac{a_3}{a_2},c=k\cdot\dfrac{a_1}{a_3}$，其中 $a_1,a_2,a_3>0$.

则 $\dfrac{1}{a(1+b)}+\dfrac{1}{b(1+c)}+\dfrac{1}{c(1+a)}\ge\dfrac{3}{\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{k\frac{a_2}{a_1}+k^2\frac{a_3}{a_1}}+\frac{1}{k\frac{a_3}{a_2}+k^2\frac{a_1}{a_2}}+\frac{1}{k\frac{a_1}{a_3}+k^2\frac{a_2}{a_3}}\ge\frac{3}{k(1+k)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a_1}{a_2+ka_3}+\frac{a_2}{a_3+ka_1}+\frac{a_3}{a_1+ka_2}\ge\frac{3}{1+k}\qquad（*）$$

下证（*）式，令$\begin{cases} a_2+ka_3=(k+1)x \\ a_3+ka_1=(k+1)y \\ a_1+ka_2=(k+1)z \end{cases}$，$x,y,z>0$，解得$\begin{cases} (k^2-k+1)a_1=k^2y+z-kx \\ (k^2-k+1)a_2=k^2z+x-ky \\ (k^2-k+1)a_3=k^2x+y-kz \end{cases}$，

$$\therefore \frac{a_1}{a_2+ka_3}+\frac{a_2}{a_3+ka_1}+\frac{a_3}{a_1+ka_2}$$

$$=\frac{1}{k^2-k+1}\cdot\frac{1}{1+k}\left(\frac{k^2y+z-kx}{x}+\frac{k^2z+x-ky}{y}+\frac{k^2x+y-kz}{z}\right)$$

$$=\frac{1}{k^2-k+1}\cdot\frac{1}{1+k}\left[k^2\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)-3k\right]$$

$$\geq\frac{1}{k^2-k+1}\cdot\frac{1}{1+k}\left(k^2\cdot 3\sqrt[3]{\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{x}{z}}+3\sqrt[3]{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}}-3k\right)$$

$$=\frac{1}{k^2-k+1}\cdot\frac{1}{1+k}\left(3k^2+3-3k\right)$$

$$=\frac{3}{1+k},$$

故（*）式得证，原不等式亦得证.

例 **3**．$a,b,c\in R^+$,求证:$\dfrac{a^2+bc}{a(b+c)}+\dfrac{b^2+ca}{b(c+a)}+\dfrac{c^2+ab}{c(a+b)}\geq 3$.

证明 $\sum\dfrac{a^2+bc}{a(b+c)}=\sum\dfrac{c}{a+b}+\sum\dfrac{ca}{ab+bc}$,再利用$\sum\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2},\sum\dfrac{ca}{ab+bc}\geq\dfrac{3}{2}$相加即得.

评析：本题采用拆项与并项的方法，再利用已知不等式和配方等技巧.本题实际上是内斯比特不等式的两种形式的合并。

例 **4**．已知x,y,z是大于-1 的实数，求证：$\dfrac{1+x^2}{1+y+z^2}+\dfrac{1+y^2}{1+z+x^2}+\dfrac{1+z^2}{1+x+y^2}\geq 2$.

分析：本题是证明分式不等式，可以尝试用柯西不等式去分母.

证明：$2x\leq 1+x^2=a,2y\leq 1+y^2=b,2z\leq 1+z^2=c$，则

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}$$

$$=\frac{a}{y+c}+\frac{b}{z+a^2}+\frac{c}{x+b}\geq\frac{a}{\frac{b}{2}+c}+\frac{b}{\frac{c}{2}+a}+\frac{c}{\frac{a}{2}+b}$$

$$=2(\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b})\geq 2.$$

例 **5**．(第 36 届 IMO 试题)设a,b,c为正实数，$abc=1$，求证：$\sum\dfrac{1}{a^3(b+c)}\geq\dfrac{3}{2}$.

证明：令$x=\dfrac{1}{a},y=\dfrac{1}{b},z=\dfrac{1}{c}$，则有$xyz=1$．原不等式可化为：$\sum\dfrac{x^2}{y+z}\geq\dfrac{3}{2}$，这个不等式利用均值、柯西和排序都可以证明（结合类似 11）.

例 **6**．设正数a,b,c满足$abc=1$，求证：$\dfrac{a}{b^2(c+1)}+\dfrac{b}{c^2(a+1)}+\dfrac{c}{a^2(b+1)}\geq\dfrac{3}{2}$.

证明 设$a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$，$x,y,z>0$, 所证即$\frac{x^2z^2}{y^3(x+z)}+\frac{x^2y^2}{z^3(y+x)}+\frac{z^2y^2}{x^3(z+y)}\ge\frac{3}{2}$,

即$\frac{zx}{y^2}\cdot\frac{zx}{xy+yz}+\frac{xy}{z^2}\cdot\frac{xy}{yz+zx}+\frac{yz}{x^2}\cdot\frac{yz}{zx+xy}\ge\frac{3}{2}$.

左边关于x,y,z对称，不妨设$x\ge y\ge z$，则$\frac{xy}{z^2}\ge\frac{zx}{y^2}\ge\frac{yz}{x^2}$,

$\frac{xy}{yz+zx}\ge\frac{zx}{xy+yz}\ge\frac{yz}{zx+xy}$，由切比雪夫不等式，

左$\ge\frac{1}{3}(\frac{xy}{z^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{yz}{x^2})(\frac{xy}{yz+zx}+\frac{zx}{xy+yz}+\frac{yz}{zx+xy})$

$\ge\frac{1}{3}\times3(\frac{xy}{z^2}\times\frac{zx}{y^2}\times\frac{yz}{x^2})^{\frac{1}{3}}(\frac{xy}{yz+zx}+\frac{zx}{xy+yz}+\frac{yz}{zx+xy})=\frac{xy}{yz+zx}+\frac{zx}{xy+yz}+\frac{yz}{zx+xy}$,

由$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$得，左边$\ge\frac{xy}{yz+zx}+\frac{zx}{xy+yz}+\frac{yz}{zx+xy}\ge\frac{3}{2}$.

例 **7**．(《数学教学》2002 年 2 号问题 556)在锐角三角形中，求证：

$$\frac{\cos A}{\cos(B-C)}+\frac{\cos B}{\cos(C-A)}+\frac{\cos C}{\cos(A-B)}\ge\frac{3}{2}.$$

证明：$\frac{\cos A}{\cos(B-C)}=\frac{\sin B\sin C-\cos B\cos C}{\cos B\cos C+\sin B\sin C}=\frac{\tan B\tan C-1}{1+\tan B\tan C}$

$=\frac{\tan A\tan B\tan C-\tan A}{\tan A+\tan A\tan B\tan C}=\frac{\tan B+\tan C}{2\tan A+\tan B+\tan C}$,

同理$\frac{\cos B}{\cos(C-A)}=\frac{\tan C+\tan A}{2\tan B+\tan C+\tan A}$,

$\frac{\cos C}{\cos(A-B)}=\frac{\tan A+\tan B}{2\tan C+\tan A+\tan B}$.

问题转化为证明

$\frac{\tan B+\tan C}{2\tan A+\tan B+\tan C}+\frac{\tan C+\tan A}{2\tan B+\tan C+\tan A}+\frac{\tan A+\tan B}{2\tan C+\tan A+\tan B}\ge\frac{3}{2}$. 即：

$$\frac{4(\tan A+\tan B+\tan C)}{2}\cdot(\frac{1}{2\tan A+\tan B+\tan C}+\frac{1}{2\tan B+\tan C+\tan A}+\frac{1}{2\tan C+\tan A+\tan B})\ge\frac{9}{2}.$$

例 **8**．$0<A,B,C<\frac{\pi}{2},A+B+C=\pi$，求证：

$$\sqrt{1-\sin A\sin B}+\sqrt{1-\sin B\sin C}+\sqrt{1-\sin C\sin A}\ge\frac{3}{2}.$$

证明：令$A=\frac{\pi}{2}-\frac{A_1}{2},B=\frac{\pi}{2}-\frac{B_1}{2},C=\frac{\pi}{2}-\frac{C_1}{2}$，则问题等价于在任意三角形$\Delta A_1B_1C_1$中，求证：$\sqrt{1-\sin A_1\sin B_1}+\sqrt{1-\sin B_1\sin C_1}+\sqrt{1-\sin C_1\sin A_1}\ge\frac{3}{2}$.

$$\sqrt{1-\sin B_1\sin C_1}\ge\frac{\sin\frac{A_1}{2}}{\sin\frac{B_1-C_1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin B_1 \sin C_1)\sin^2\frac{B_1-C_1}{2} \ge \sin^2\frac{A_1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin B_1 \sin C_1)[1-\cos(B_1-C_1)] \ge 1-\cos A_1$$

$$\Leftrightarrow \sin B_1 \sin C_1[1-\cos(B_1-C_1)] \ge 0 .$$

问题转化为证明$\dfrac{\sin\frac{A_1}{2}}{\cos\frac{B_1-C_1}{2}}+\dfrac{\sin\frac{B_1}{2}}{\cos\frac{C_1-A_1}{2}}+\dfrac{\sin\frac{C_1}{2}}{\cos\frac{A_1-B_1}{2}} \ge \dfrac{3}{2}$.

由于$\dfrac{\sin\frac{A_1}{2}}{\cos\frac{B_1-C_1}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{A_1}{2}\cos\frac{A_1}{2}}{2\cos\frac{B_1-C_1}{2}\cos\frac{A_1}{2}}=\dfrac{\sin A_1}{2\sin\frac{B_1+C_1}{2}\cos\frac{B_1-C_1}{2}}=\dfrac{\sin A_1}{\sin B_1+\sin C_1}$，

问题等价于

$$\frac{\sin A_1}{\sin B_1+\sin C_1}+\frac{\sin B_1}{\sin A_1+\sin B_1}+\frac{\sin C_1}{\sin A_1+\sin B_1} \ge \frac{3}{2} .$$

例 **9**．(2000 年韩国数学奥林匹克竞赛试题)设$a>b>c>0$， $x>y>z>0$，证明：

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \ge \frac{3}{4} .$$

证明：由均值不等式得

$$(by+cz)(bz+cy) \le [\frac{(by+cz)+(bz+cy)}{2}]^2=\frac{1}{4}(b+c)^2(y+z)^2 .$$

于是，只需证明

$$\frac{a^2x^2}{(b+c)^2(y+z)^2}+\frac{b^2y^2}{(c+a)^2(z+x)^2}+\frac{c^2z^2}{(a+b)^2(x+y)^2} \ge \frac{3}{16} .$$

由柯西不等式得

$$(1^2+1^2+1^2)[\frac{a^2x^2}{(b+c)^2(y+z)^2}+\frac{b^2y^2}{(c+a)^2(z+x)^2}+\frac{c^2z^2}{(a+b)^2(x+y)^2}]$$

$$\ge [\frac{ax}{(b+c)(y+z)}+\frac{by}{(c+a)(z+x)}+\frac{cz}{(a+b)(x+y)}]^2 .$$

只要证明:

$$\frac{ax}{(b+c)(y+z)}+\frac{by}{(c+a)(z+x)}+\frac{cz}{(a+b)(x+y)} \ge \frac{3}{4} .$$

因为$a>b>c>0$， $x>y>z>0$，

所以$\dfrac{a}{b+c}>\dfrac{b}{c+a}>\dfrac{c}{a+b},\dfrac{x}{y+z}>\dfrac{y}{z+x}>\dfrac{z}{x+y}$.

由切比雪夫不等式得

$$\frac{ax}{(b+c)(y+z)}+\frac{by}{(c+a)(z+x)}+\frac{cz}{(a+b)(x+y)}$$

$$\ge \frac{1}{3}(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y})$$

$$\ge \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4} .$$

6．有关内斯比特不等式的猜想

猜想 **1**：借助杨路教授的 Bottema2009 软件发现，加强 **5** 仍然可以再加强为：设 $a,b,c>0$，则：

$$\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}\geq\frac{\sqrt{13+16\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{|(a-b)(b-c)(c-a)|}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

这条式子的系数是$16k^4-104k^2-343=0$四次方程的根,是此形式最大的系数．我们通过差分法，可以证明此不等式。

证明： 将不等式移至左边，通分去分母后，得：

$$\sqrt{13+16\sqrt{2}}a^2b+\sqrt{13+16\sqrt{2}}ac^2-\sqrt{13+16\sqrt{2}}a^2c+\sqrt{13+16\sqrt{2}}b^2c-\sqrt{13+16\sqrt{2}}b^2a-\sqrt{13+16\sqrt{2}}bc^2$$
$$-a^2b-ac^2-a^2c-b^2c-b^2a-bc^2+2a^3+2b^3+2c^3\geq 0$$

当 a= x+y+z, b= y+z, c= z（即 $a\geq b\geq c$ ）则（以下不等式显然成立）：

$$2y^3+2x^3+\sqrt{13+16\sqrt{2}}x^2y+4xyz+\sqrt{13+16\sqrt{2}}xy^2+5x^2y+4x^2z+3xy^2+4y^2z\geq 0$$

当 a= x+y+z, b= z, c= y+z（即 $a\geq c\geq b$ ）则：

$$2y^3+2x^3+4xyz+5x^2y+4x^2z+3xy^2+4y^2z-\sqrt{13+16\sqrt{2}}x^2y-\sqrt{13+16\sqrt{2}}xy^2\geq 0$$

注意到$\sqrt{13+16\sqrt{2}}<6$，则有：

$$2y^3+2x^3+4xyz+5x^2y+4x^2z+3xy^2+4y^2z-\sqrt{13+16\sqrt{2}}x^2y-\sqrt{13+16\sqrt{2}}xy^2$$
$$=\frac{1}{1372}\left(14x+7y-3\sqrt{13+16\sqrt{2}}y-7\sqrt{2}y+\sqrt{13+16\sqrt{2}}\sqrt{2}y\right)^2\left(14x+21y-\sqrt{13+16\sqrt{2}}y-2\sqrt{13+16\sqrt{2}}\sqrt{2}y+14\sqrt{2}y\right)$$
$$+4xyz+4x^2z+4y^2z\geq 0$$

Q $21y-\sqrt{13+16\sqrt{2}}y-2\sqrt{13+16\sqrt{2}}\sqrt{2}y+14\sqrt{2}y$中，注意到$21+14\sqrt{2}\to 40.799$，

$\sqrt{13+16\sqrt{2}}+2\sqrt{13+16\sqrt{2}}\sqrt{2}\to 22.851$；$\therefore$原不等式成立。

但是否有通法或简便算法解决这类问题呢？

猜想 **2**：借助杨路教授的 Bottema2009 软件发现，加强一仍然可以再加强为：

设$a,b,c>0$，则：$\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}\geq\frac{9}{16}\cdot\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2}$．

我们曾经借助计算机用差分法解决了这个极强的不等式，过程如下：将大于号右边一直左边，通分得其分子为：

$$16a^5+16b^5+16c^5-17a^4b-17ab^4-17b^4c-8bc^4-8c^4a-17ca^4+17a^3b^2+17a^2b^3-b^3c^2+8b^2c^3$$
$$+8c^3a^2-c^2a^3+2a^2b^2c-7ab^2c^2-7a^2bc^2$$

接下来差分的式子都是上式的分子．一次差分：

[1].令$a=x+y+w,b=y+w,c=w$得：

$$16x^5+109x^3y^2+256y^3xw+150x^3yw+264xy^2w^2+278x^2y^2w+168x^2yw^2+96w^3xy+63x^4y$$
$$+126x^2y^3+24x^2w^3+40x^3w^2+46x^4w+128y^4w+80y^4x+96y^2w^3+176w^2y^3+32y^5\geq 0$$

[2].令$a=w,b=y+w,c=x+y+w$得：

$$16x^5+136x^3y^2+166y^3xw+240x^3yw+192xy^2w^2+350x^2y^2w+312x^2yw^2+96w^3xy+72x^4y$$
$$+135x^2y^3+96x^2w^3+112x^3w^2+64x^4w+38y^4w+53y^4x+24y^2w^3+32w^2y^3+14y^5\geq 0$$

[3].令$a=x+y+w,b=w,c=y+w$得：

$$16x^5+91x^3y^2-14y^3xw+114x^3yw-96xy^2w^2+80x^2y^2w+24x^2yw^2-48w^3xy+63x^4y+63x^2y^3$$
$$+24x^2w^3+40x^3w^2+46x^4w+38y^4w+17y^4x+24y^2w^3+32w^2y^3+14y^5$$

对于[3]进行二次差分得：（1）令$x=a+b+c,y=b+c,w=c$得：

$$6576ab^2c^2+3664ab^3c+5152abc^3+4162a^2bc^2+1304a^3bc+3320a^2b^2c+143a^4b$$
$$+189a^4c+503a^3b^2+841a^3c^2+874a^2b^3+1740a^2c^3+1492ac^4+748ab^4+1584b^4c+3696b^3c^2$$

$+4224b^2c^3+2376bc^4+16a^5+264b^5+528c^5\geq 0$

（2）令 $x=a+b+c, y=c, w=b+c$ 得：

$$4711ab^2c^2+2322ab^3c+4296abc^3+3581a^2bc^2+1134a^3bc+2484a^2b^2c+126a^4b$$
$$+189a^4c+384a^3b^2+841a^3c^2+580a^2b^3+1740a^2c^3+1492ac^4+432ab^4+783b^4c$$
$$+1971b^3c^2+2556b^2c^3+1756bc^4+16a^5+126b^5+528c^5\geq 0$$

（3）令 $x=b+c, y=c, w=a+b+c$ 得：

$$1202ab^2c^2+810ab^3c+816abc^3+72a^2bc^2+216a^2b^2c+24a^3b^2+112a^2b^3+264ac^4$$
$$+783b^4c+1971b^3c^2+2556b^2c^3+1756bc^4+126b^5+528c^5\geq 0$$

（4）令 $x=c, y=b+c, w=a+b+c$ 得：

$$194ab^2c^2+346ab^3c+240abc^3+72a^2b^2c+24a^3b^2+104a^2b^3+264ac^4+174b^4a$$
$$+399b^4c+707b^3c^2+1052b^2c^3+1148bc^4+108b^5+528c^5-72a^2bc^2\geq 0$$

（5）令 $x=b+c, y=a+b+c, w=c$ 得：

$$1927ab^2c^2+1250ab^3c+1864abc^3+1661a^2bc^2+702a^3bc+1428a^2b^2c+108a^4b+125a^4c$$
$$+324a^3b^2+441a^3c^2+488a^2b^3+812a^2c^3+884ac^4+366ab^4+399b^4c+707b^3c^2+1052b^2c^3$$
$$+1148bc^4+14a^5+108b^5+528c^5\geq 0$$

（6）令 $x=c, y=a+b+c, w=b+c$ 得：

$$1927ab^2c^2+1250ab^3c+1864abc^3+1661a^2bc^2+702a^3bc+1428a^2b^2c+108a^4b+125a^4c$$
$$+324a^3b^2+441a^3c^2+488a^2b^3+812a^2c^3+884ac^4+366ab^4+399b^4c+707b^3c^2+1052b^2c^3$$
$$+1148bc^4+14a^5+108b^5+528c^5\geq 0$$

但过程之长令人望而生畏（已删减很多），而且毫无技巧．我们希望找到一种有技巧性且简洁明了的证明．这里所谓的猜想也就是对这类题解法的追问．

猜想**3**：当 $a,b,c,d\in R_+$，则有（其中系数 $\frac{1}{2}$ 为最强情况）：

$$\sum\frac{a}{b+c+d}-\frac{4}{3}\geq\frac{1}{2}\cdot\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2+(a-c)^2+(b-d)^2}{(a+b+c+d)^2}$$

为了研究此四维不等式，我们还发现了以下恒等式：

$$(3a-b-c-d)^2+(3b-c-a-d)^2+(3c-a-b-d)^2+(3d-a-b-c)^2=2[(a+b-d-c)^2$$
$$+(b+c-d-a)^2+(c+a-d-b)^2+(d+b-a-c)^2+(a+d-b-c)^2+(c+d-a-b)^2]$$

猜想 **4**：当 $a,b,c,d\in R_+$，则有：$\sum\frac{a^2}{b+c+d}-\frac{a+b+c+d}{3}\geq\frac{1}{6}\cdot\frac{(3a-b-c-d)^2}{a+b+c+d}$

这实际上是加强 **2** 的推广（$\frac{1}{6}$ 依旧是最强的系数），但是按照加强 **2** 的证法只能证明以下形式：当 $a_1,a_2......a_n\in R_+$ 时，有：$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_i}-\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n-1}\geq\frac{4}{(n-1)^3}\cdot\frac{[na_1-\sum_{i=1}^{n}a_i]^2}{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2}$（鉴于证法太相似，在此不作详细说明）。

对于以上猜想 **3** 与猜想 **4**，我们已经运用差分法（设：a=x+y+z+w,b=y+z+w,c=z+w,d=w）立马就证明了此两猜想。在此之前，我们也尝试过将三维 SOS 法推广应用到四维的情况，但无法奏效，亦尝试过配方法，但四维项数太过繁多，运算时我们望而生畏，就此打住（逐步调整法亦有尝试，但比差分法计算更繁复）。望各位老师指点迷津。

猜想 **5**：我们正在寻找此类加强的的普遍规律：若a_1、a_2……$a_n \in R_+$，则：

$$\sum_{i=1}^{n}[\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_i}]-\frac{n}{n-1}\geq k\cdot\frac{\sum_{n\geq i>j\geq 1}(a_i-a_j)^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ 2}},$$

k 的最大值何时取得？证明方法与技巧？

猜想 **6**：若a_1、a_2……$a_n \in R_+$，则：

$$\sum_{i=1}^{n}[\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_i}]-\frac{n}{n-1}\geq k\cdot\frac{\sum_{n\geq i>j\geq 1}(a_i-a_j)^2}{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2}.$$

k 的最大值何时取得？

如何用技巧性的方法证明，这些都是进一步探讨的内容.

猜想 **7**：若a_1、a_2……$a_n \in R_+$，则：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_i}-\frac{3}{2}\geq k\cdot\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{(a_i-a_j)}{(a_i+a_j)}$$

k 的最大值何时取得？

猜想 **8**：若a_1、a_2……$a_n \in R_+$，则：

$$\sum_{i=1}^{n}[\frac{a_i^{\ n}}{(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ n+m})-a_i^{\ n+m}}]\geq\frac{k}{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ m}}$$

k 的最大值何时取得？

猜想 **9**：若a_1、a_2……$a_n \in R_+$， m、l、$n \in \mathrm{N}_+$ 则：

$$k\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_i}\leq\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ l}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\ m}}{(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ m+l})-a_i^{\ m+l}}$$

k 的最大值何时取得？

猜想 **10**：a_1、a_2……$a_n \in R_+$,则：$\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^{n}a_i)-a_i}-\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n-1}\geq\frac{1}{(n-1)(n-2)}\cdot\frac{[na_1-\sum_{i=1}^{n}a_i]^2}{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2}$

这是猜想 **4** 的推广，形式非常优美，但证明困难。

参考文献

[1] 匡继昌.常用不等式（第四版）.济南 山东科学技术出版社,2010.8

[2] 李胜宏著. 平均值不等式与柯西不等式.上海 华东师范大学出版社,2005.4

[3] 苏勇，熊斌编著. 不等式的解题方法及技巧. 上海 华东师范大学出版社,2005.4

[4] 刘磊 两道著名不等式的等价关系的一个简证 《中学数学》 1999,4

[5] 李倩 数学奥林匹克问题高 208 《中等数学》2007.8

[6] 吴俊熹 熊奥林 刘哲 瓦西列夫不等式的推广、加强与类似 第三届丘成桐中学数学奖论文集 2010.12

[7] Squares Analysis Method S.O.S http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.pep?t=80127

[8] 杨路;姚勇 差分代换矩阵与多项式的非负性判定 系统科学与数学 2009.09

[9] 徐嘉;姚勇 基于随机矩阵的差分代换算法的完备化 数学学报 2011.02

[10] 安振平 三个正整数积为 1 的一种代换方法及其应用 《数学通讯》2010.8

[11] 耿绍辉 介绍一种证明三元齐次不等式的方法 2010

[12] 黄伟亮 几个不等式的共同背景 2007.03

[13] 蔡玉书 舒尔不等式及其变式的应用 《数学通讯》2010.8

[14] 杨志明 SOS（Sum of Square）法及其应用 2010.07

[15] 蔡玉书 Chebyshev 不等式的应用 《数学通讯》2010.7

[16] 李永利 一个优美的代数不等式 《数学通讯》2008.8

[17] 李歆 一道日本奥赛题的别证及其他 《数学通讯》2010.5

后记

我们的研究在各位专家看来还稍显稚嫩，也许里面有一些问题于各位专家教授早有研究，也许研究还不够深入，也许研究还有少少瑕疵，但我相信瑕不掩瑜，希望各位专家教授能指导赐教，不胜荣幸。

我们已经将这一类题目的普遍规律以及解题技巧与我们的研究成果归纳得相对完整。内斯比特不等式有深远的背景与广泛的运用，是一个极有效，优美且蕴涵丰富的半成品。我们认为它的价值非凡，而我们觉得仅仅研究了它的皮毛，但皮毛依旧可以是精品。我们相信这篇论文将给人以启示，而我们的研究还将继续。

Postscript

Maybe in the eyes of the experts, our theory research is slightly not mature because we have followed their beaten track. In addition, our research is not deep or good enough to avoid the flaw in it. However, we believe: its popularity is bound to outweigh its shortcomings. Therefore, it will be a great honor for us to get guidance or communication from the experts, which is what are looking forward to.

We have summed up the general rule and the skills for comprehension of a kind relevantly completely in terms of our research achievement. Nesbitt's inequality has a far-reaching background and an

extensive use. Though it is only semi-finished, it is effective, splendid and rich. So we consider it valuable and of high-quality even though our understanding of this issue is quite superficial and simplistic. We are sure this article can inspire readers much， and we are bound to go on studying it.